Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 24 novembre 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°4

Partie A.

On définit les deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-1}-3 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2+6x+10 \end{array}$$

1. Justifier que f et g sont bien définies.
2. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
3. La fonction g est-elle injective ? Surjective ?
4. Justifier que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies, et les calculer.
   Les fonctions f et g sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

Partie B.

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications. Soit $h = g \circ f$.

1. On suppose que h est bijective. Démontrer que f est injective et g est surjective.
2. On suppose que f et h sont bijectives. Démontrer que g est bijective, et exprimer sa réciproque en fonction de f et de h.

Partie C. Étude d'une fonction

On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

1. Justifier que f est bien définie et que son image est incluse dans l'intervalle $]0,\pi[$.
2. On pose $g = f \circ \mathrm{sh}$.
   (a) Simplifier l'expression de $g(x)$ pour tout réel x.
   (b) Démontrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,\pi[$ et donner sa réciproque.
   (c) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,\pi[$, donner une forme simple de sa réciproque.
3. (a) Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) En déduire une forme simple de f.
   (c) Tracer la courbe représentative de f ainsi que celle de sa réciproque.