Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 16 novembre 2026**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°4

Une suite à convergence très rapide

Partie A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
   (a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Calculer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (e) Justifier que la suite $\left(\frac{1}{n^n}\right)$ est négligeable devant la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)$.
2. Soit $a \in [0,1[$. Démontrer que la suite $(a^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $\left(\frac{1}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie B.

Soit u une suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n}$$

1. Justifier que la suite u est bien définie et strictement positive.
2. Démontrer que la suite u est décroissante, puis qu'elle converge, et enfin que sa limite est nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n$.

3. (a) Démontrer l'inégalité : $\forall x \in]-1,+\infty[\quad \ln(1+x) \leqslant x$
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_n - v_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$
   (c) En déduire la proposition :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad \text{si} \quad n \geqslant p \quad \text{alors} \quad 0 \leqslant v_p - v_n \leqslant \frac{u_p}{2^p} \qquad (\star)$$

4. (a) À l'aide de la proposition $(\star)$, démontrer que la suite v est minorée par $v_0 - u_0$.
   En déduire qu'elle converge. On note A sa limite.
   (b) Démontrer par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m < 1$.
   En déduire que $A < 0$.

On pose ensuite $a = e^A$ de sorte que $a \in]0,1[$ et $A = \ln a$.

5. Toujours à l'aide de la proposition $(\star)$, démontrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad 2^p \ln a \leqslant \ln u_p \leqslant u_p + 2^p \ln a$$

En déduire que $u_p \underset{p\to+\infty}{\sim} a^{2^p}$.