TD. B3
Logique

Exercices de cours

1 Démontrer la seconde loi de De Morgan à l'aide d'une table de vérité.

La démontrer aussi sans table de vérité.

2 Démontrer que :

$$P \Rightarrow (Q \text{ ou } R) \quad = \quad (P \text{ et } \neg Q) \Rightarrow R$$

3 À l'aide d'une table de vérité à 8 lignes, démontrer les associativités et distributivités.

4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Que dire des propositions suivantes ?

a. $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$
b. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$
c. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$
d. $\exists A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

5 Énoncer en termes logiques les propositions suivantes pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. f est la fonction nulle.
b. f n'est pas la fonction nulle.
c. f s'annule.
d. f ne s'annule pas.
e. f est croissante.
f. f n'est pas croissante.
g. f est 2π-périodique.
h. f est périodique.
i. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

a. Calculer les premiers termes de cette suite.
b. Deviner une expression générale de u_n, puis démontrer votre conjecture.

7 Soit $m \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^m$$

Démontrer que pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) = \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$$

Expliquer pourquoi l'implication $\mathscr{P}_m \implies \mathscr{P}_{m+1}$ est fausse.

Travaux dirigés

1 Donner la négation des propositions suivantes.

a. $x \leqslant 3$
b. $0 \leqslant x \leqslant 2$.
c. $a = b = 0$
d. Si la caravane passe alors les chiens aboient.
e. Robert joue à la pétanque tous les dimanches.
f. Les étudiants qui ont de bonnes moyennes sont contents et leurs parents aussi.
g. La nuit tous les chats sont gris.

2 Soit P, Q, R des propositions. Démontrer :

a. $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
b. $(P \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)) \;=\; Q$
c. $((P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q)) \;=\; (P \Leftrightarrow Q)$

3 Soit P, Q, R des propositions. Les égalités suivantes son-elles vraies ?

a. $(P \wedge Q) \vee R = P \wedge (Q \vee R)$
b. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) = (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$
c. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R = P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$.

4 La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x + 1$$

5 Soit i et j deux entiers naturels. Démontrer que si $i + j > 7$ alors $i > 3$ ou $j > 4$.

6 Soit x un réel. Démontrer que si x^2 est irrationnel alors x est irrationnel.

7 Soit a et b deux réels. Démontrer que si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant a \Longrightarrow x \leqslant b$$

alors $a \leqslant b$.

Donner la contraposée de cette propriété.

8 Soit x un réel. Démontrer que :

$$x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; |x| \leqslant \varepsilon$$

9 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
c. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
d. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
e. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
f. $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$

Pourquoi manque-t-il deux possibilités ?

10 Écrire en termes logiques qu'étant donnés trois réels, deux au moins d'entre eux sont de même signe.

Pour ceci, remarquer que deux réels x et y ont même signe si $xy \geqslant 0$.

Démontrer ensuite cette propriété.

11 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations.

a. f est l'identité de $\mathbb{R}$.

b. f admet un point fixe.

c. f est monotone.

d. f est surjective (tout élément de $\mathbb{R}$ admet au moins un antécédent).

e. f est injective (tout élément de $\mathbb{R}$ admet au plus un antécédent).

12 Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

a. $\exists x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$

et $(\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}\ g(x) = 0)$

b. $\exists x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$

et $(\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0) \text{ ou } (\exists x \in \mathbb{R}\ g(x) = 0)$

c. Répondre aux mêmes questions en remplaçant les $\exists$ par des $\forall$.

13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Démontrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est strictement décroissante.

14 Principe des tiroirs.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ma commode possède n tiroirs et elle contient $n+1$ chaussettes.

Démontrer qu'au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes.

b. Démontrer de nouveau qu'étant donnés trois réels, deux au moins sont de même signe.

15 On considère 2026 entiers relatifs.

Démontrer qu'il est possible d'en extraire un certain nombre dont la somme est multiple de 2026.

16 Démontrer que :

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 1 + \sum_{k=0}^{n-1} k.k! = n!$

b. Pour tout entier $n \geqslant 4$ $\quad 2^n \geqslant 3(n+1)$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{3k}\right) \geqslant \sqrt[3]{n+1}$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 7$ divise $3^{2n+3} + 2^n$

17 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note

$$\mathscr{P}_n : \quad 7^n + 1 \text{ est multiple de } 6.$$

a. Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$.

b. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est toujours fausse.

18 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f(n) \geqslant n$

19 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}} + u_n.$$

Justifier que cette suite est bien définie.

20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 9u_{n+1} - 20u_n$$

Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n - b^n$$

21 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3}{u_n^2}$$

22 On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

a. Donner une expression simple de $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la démontrer.

b. Même question avec $\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0, u_1, u_2 et l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 7u_{n+2} - 11u_{n+1} + 5u_n$$

a. On suppose que $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$. Déterminer le terme général de (u_n).

b. Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 25$.

24 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$$

Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n.$

25 Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad u_{m+n} = u_m u_n$$

26 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

27 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

28 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

a. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$

c. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$

d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$