Corrigé du Devoir à la Maison n°3

1. (a) On obtient $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$, donc :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad R_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

Par linéarité de la somme et changement d'indice, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$R_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Alors :

$$\forall k = 2, \dots, n \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$$

Par somme :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

En ajoutant le terme pour $k = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

Ceci donne bien : $S_n \leqslant 1 + R_n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Cette différence est positive donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leqslant S_{n+1}$.

Ainsi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

L'expression obtenue pour R_n donne :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad S_n \leqslant 1 + R_n = 2 - \frac{1}{n}$$

On en déduit :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad S_n \leqslant 2.$$

Cette inégalité est vraie aussi pour $n = 1$, donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

(d) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc par théorème de la limite monotone elle est convergente.

2. (a) Les fonctions sinus et tangente sont deux fois dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ de dérivées secondes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \sin''(x) = -\sin x \qquad \text{et} \qquad \tan''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x)$$

La première est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et la seconde est positive, donc la fonction sin est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction tangente est concave sur cet intervalle.

Ces deux fonctions admettent la droite d'équation $y = x$ pour tangente en 0. Par théorème la fonction sin est en-dessous de sa tangente et la fonction tan est au-dessus, donc :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad 0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

(b) Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $0 < \sin x$. D'après l'encadrement de la question précédente :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{1}{\tan^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x}$$

Comme

$$\frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

alors on obtient bien :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x}$$

(c) Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\frac{\pi}{2} - x > 0$, donc $\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sont non-nuls.
La formule $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ donne :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 \cos^2 x}$$

La formule $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ donne $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ puis :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{4}{\sin^2(2x)}$$

C'est le résultat attendu.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sépare les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs dans la somme S_{2n+1} :

$$S_{2n+1} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Ceci donne :

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} \times \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} S_n + T_n$$

La formule est démontrée.

(b) Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ alors par composition de limites $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.

L'égalité que l'on vient de démontrer donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad T_n = S_{2n+1} - \frac{1}{4}S_n$$

Par linéarité de la limite la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell - \frac{1}{4}\ell = \frac{3}{4}\ell$.

4. (a) On obtient :

$$u_1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{\sin^2(x_{k,1})} = \frac{1}{\sin^2(x_{0,1})} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique le changement de variable $j = 2^n - 1 - k$.

- Si $k = 2^{n-1}$ alors $j = 2^n - 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$.
- Si $k = 2^n - 1$ alors $j = 0$.

Ainsi :

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(x_{k,n+1}\right)} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(x_{2^n-1-j,n+1}\right)}$$

On calcule, pour tout entier j :

$$\begin{aligned} x_{2^n-1-j,n+1} &= \frac{2(2^n-1-j)+1}{2^{n+1}} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \left(1 - \frac{2j+1}{2^{n+1}}\right) \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2j+1}{2^{n+1}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x_{j,n+1} \end{aligned}$$

On obtient donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(x_{k,n+1}\right)} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x_{j,n+1}\right)}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sépare la somme u_{n+1} en deux :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})} + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})}$$

D'après la question précédente :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})} + \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x_{j,n+1}\right)}$$

Par changement d'indice (j étant une variable muette) et linéarité :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x_{k,n+1}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x_{k,n+1}\right)} \right) \end{aligned}$$

La question (2c) donne :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{4}{\sin^2(2x_{k,n+1})}$$

On calcule, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$2x_{k,n+1} = 2 \times \frac{2k+1}{2^{n+1}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{2k+1}{2^n} \times \frac{\pi}{2} = x_{k,n}$$

Et donc on en déduit :

$$u_{n+1} = 4 \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n})} = 4u_n$$

C'est le résultat attendu.

(d) La question précédente montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 4, et son premier terme est $u_1 = 2$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 2 \times 4^{n-1} = \frac{4^n}{2}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition des $x_{k,n}$:

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(x_{k,n})^2} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{4^n}{(2k+1)^2} \times \frac{4}{\pi^2} \right)$$

Par linéarité :

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(x_{k,n})^2} = \frac{4^{n+1}}{\pi^2} \times \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

On obtient bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(x_{k,n})^2} = \frac{4^{n+1}}{\pi^2} T_{2^{n-1}-1}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, 2^{n-1}-1\}$. On applique l'encadrement de la question (2b) à $x_{k,n}$.

Comme $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}-1$ alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2^n - 1$, donc $0 < \frac{2k+1}{2^n} < 1$, puis $0 < x_{k,n} < \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $x_{k,n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc l'inégalité de la question (2b) est valable pour $x_{k,n}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{\sin^2(x_{k,n})} - 1 \leqslant \frac{1}{(x_{k,n})^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x_{k,n})}$$

Ceci est valable pour tout k allant de 0 à $2^{n-1}-1$, donc par somme :

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{1}{\sin^2(x_{k,n})} - 1 \right) \leqslant \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(x_{k,n})^2} \leqslant \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n})}$$

Par linéarité de la somme, et en appliquant la formule de la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n})} - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} 1 \leqslant \frac{4^{n+1}}{\pi^2} T_{2^{n-1}-1} \leqslant \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n})}$$

Par définition de u_n :

$$u_n - 2^{n-1} \leqslant \frac{4^{n+1}}{\pi^2} T_{2^{n-1}-1} \leqslant u_n$$

On multiplie par $\frac{\pi^2}{4^{n+1}}$. Comme $\frac{\pi^2}{4^{n+1}} \times 2^{n-1} = \frac{\pi^2}{2^{2n+2}} \times 2^{n-1} = \frac{\pi^2}{2^{n+3}}$ alors :

$$\frac{\pi^2}{4^{n+1}} u_n - \frac{\pi^2}{2^{n+3}} \leqslant T_{2^{n-1}-1} \leqslant \frac{\pi^2}{4^{n+1}} u_n$$

Ce résultat est bien valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) La formule obtenue pour u_n donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2^{n+3}} \leqslant T_{2^{n-1}-1} \leqslant \frac{\pi^2}{8}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{2^{n+3}} = 0$, donc par théorème d'encadrement :

$$T_{2^{n-1}-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{8}$$

Par composition de limites, comme $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{4}\ell$ et $(2^{n-1}-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $T_{2^{n-1}-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{4}\ell$, ce qui donne par unicité de la limite :

$$\frac{3}{4}\ell = \frac{\pi^2}{8}$$

Finalement $\ell = \frac{\pi^2}{6}$, et on a bien démontré que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.