Feuille de T. D. A5
Primitives

Exercices de cours

1 Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$f_1(x) = 6x^4 - 4x^3 - 3x + 5$

$f_2(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ $\qquad f_3(x) = e^{1-x}$

$f_4(x) = \dfrac{4x^3 - x^2 - 3x}{x^2}$ $\qquad f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$f_6(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^5}$ $\qquad f_7(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$

$f_8(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + 1}$ $\qquad f_9(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{5x^2+1}}$

2 Calculer de deux façons différentes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x$$

3 Calculer une primitive de $\quad f : x \mapsto \operatorname{sh}^4 x$

4 Calculer : $\quad I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{3t} \sin t \,\mathrm{d}t$

5 Calculer : $\quad I_3 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1-x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

6 Calculer la primitive qui s'annule en 0 de :

$$f : \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2+5x+6}{x+1} \end{array}$$

7 Déterminer une primitive de : $\quad f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

8 Calculer :

$I_4 = \displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}} \frac{3x-4}{2x^2+3x-2} \,\mathrm{d}x$ $\qquad I_5 = \displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7}$

$I_6 = \displaystyle\int_1^{2} \frac{x \,\mathrm{d}x}{x^2-4x+7}$ $\qquad I_7 = \displaystyle\int_0^{3} \frac{4-5x}{x^2-8x+16} \,\mathrm{d}x$

9 Calculer :

$I_8 = \displaystyle\int_0^{\pi} x \cos x \,\mathrm{d}x$ $\qquad F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \arctan t \,\mathrm{d}t$

10 Utiliser les changements de variable :

$x = e^t \qquad x = 3t-2 \qquad x = \frac{1}{t}$
$x = \cos t \qquad t = \tan \frac{x}{2} \quad$ ou $\quad x = \frac{\pi}{2} - 2t$

Pour calculer les intégrales suivantes.

$I_9 = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$ $\qquad I_{10} = \displaystyle\int_1^{2} \frac{3t^2-2}{3t-2} \,\mathrm{d}t$

$I_{11} = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{12} = \displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin 2t}{1+\cos t} \,\mathrm{d}t$

$I_{13} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} \,\mathrm{d}x$

Travaux dirigés

1 Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$f_1(x) = \dfrac{x}{x^2+3x-10}$ $\qquad f_2(x) = \dfrac{1}{x^2-2x-1}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+9}$ $\qquad f_4(x) = \dfrac{x}{4x^2+4x+1}$

$f_5(x) = \dfrac{1}{8x^2+50}$ $\qquad f_6(x) = \dfrac{9}{x^2-9x}$

$f_7(x) = \dfrac{x}{x^2-8x+20}$ $\qquad f_8(x) = \dfrac{1}{1-3x+\frac{9}{2}x^2}$

2 Calculer une primitive des fonctions :

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

3 Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) \mathrm{d}t$$

en utilisant un changement de variable affine échangeant ses bornes.

4 Soit N un entier naturel. Pour tout entier m tel que $0 \leqslant m \leqslant N$ on note :

$$I_m = \int_0^1 x^m (1-x)^{N-m} \,\mathrm{d}x$$

a. Calculer I_0.

b. Démontrer que pour tout $m \in \{0, \ldots, N-1\}$:

$$I_{m+1} = \frac{m+1}{N-m} I_m$$

c. En déduire une formule générale pour I_m et la démontrer par récurrence.
Vérifier cette formule pour I_N.

d. Donner pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ la valeur de :

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \,\mathrm{d}x$$

5 Déterminer, pour chacune des intégrales suivantes, quelle méthode permet de la calculer : primitives usuelles, manipulation d'expressions polynomiales et décomposition en éléments simples, linéarisation d'expressions trigonométriques, intégration par parties, changement de variable (dire lequel), autre.

$$I_1 = \int_0^4 \frac{2t}{t+2}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{3t-4}{(t-2)^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{t^2+t+1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$I_5 = \int_4^8 \frac{4\mathrm{d}t}{t^2-4t+3} \qquad I_6 = \int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+a)} \quad \text{avec } a \neq 0 \qquad I_7 = \int_0^1 \frac{4t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$I_8 = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t \qquad I_9 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{8t\,\mathrm{d}t}{(3t^2-2)^4} \qquad I_{10} = \int_{-1}^0 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4-4} \qquad I_{11} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(t^3+2)}$$

$$I_{12} = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4-t^2-2} \qquad I_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} t(2t-1)^8\,\mathrm{d}t \qquad I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t\,\mathrm{d}t \qquad I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$I_{16} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad I_{17} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{3+\sin^2 t} \qquad I_{18} = \int_0^x t^3 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \qquad I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t}\cos 3t\,\mathrm{d}t$$

$$I_{20} = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} e^{-t}\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t \qquad I_{21} = \int_{-2}^{2} t\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t \qquad I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t\cos 2t\,\mathrm{d}t \qquad I_{23} = \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} t\operatorname{sh} 2t\,\mathrm{d}t$$

$$I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t \qquad I_{25} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos t\,\mathrm{d}t \qquad I_{26} = \int_0^A t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_{27} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t} \qquad I_{28} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t+1}} \qquad I_{29} = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t-1}} \qquad I_{30} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$$

$$I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \qquad I_{32} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\cos t} \qquad I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 t}{1+4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \qquad I_{34} = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{e^t-2-3e^{-t}}$$

$$I_{35} = \int_1^e \frac{\ln^n t\,\mathrm{d}t}{t} \qquad I_{36} = \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad I_{37} = \int_1^6 \frac{\ln(t^2+4)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_{38} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Calculer ensuite ces intégrales.

On pourra puiser dans la liste suivante de changements de variables utiles : $x = at+b$ avec (a,b) à déterminer, $x = t^2$, $x = t^3$, $x = \tan t$, $x = \cos t$, $x = e^t$, $x = \sqrt{t+1}$, $x = \sqrt{e^t-1}$, $t = \operatorname{sh} x$...

6 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ admet une primitive Φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
En déduire que F est bien définie.

b. Démontrer que F est dérivable et calculer sa dérivée. Que peut-en en déduire ?

c. Appliquer le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ à $F(x)$ et retrouver le résultat précédent.

7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire que la suite (I_n) converge.

b. Calculer $I_{n-1} + I_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Déterminer la limite de la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

8 On note F et G les primitives s'annulant en 0 des fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+\cos x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{1+\sin x}$$

a. Exprimer les fonctions F et G à l'aide d'intégrales, et préciser sur quels intervalles maximaux elles sont définies.

b. Calculer $F(x)$ en utilisant le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$.
Exprimer le résultat en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

c. Expliciter de même $G(x)$.

9 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\Phi(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Justifier que la fonction Φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Justifier que Φ est dérivable, et calculer sa dérivée.