## TD. A6 **Primitives**

## \_\_\_\_ Exercices de cours \_\_\_\_

1 Donner une primitive de chacune des fonctions

$$f_1(x) = 6x^4 - 4x^3 - 3x + 5$$

$$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$
  $f_3(x) = e^{1-x}$ 

$$f_4(x) = \frac{4x^3 - x^2 - 3x}{x^2}$$
  $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 

$$f_6(x) = \frac{1}{(2x-3)^5}$$
  $f_7(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$ 

$$f_6(x) = \frac{1}{(2x-3)^5} \qquad f_7(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$
$$f_8(x) = \frac{\cosh x}{\sinh^2 x + 1} \qquad f_9(x) = \frac{3x}{\sqrt{5x^2 + 1}}$$

(2) Calculer de deux façons différentes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

- (3) Calculer une primitive de  $f: x \mapsto \operatorname{sh}^4 x$
- $(4) Calculer: I_2 = \int_{1}^{2\pi} e^{3t} \sin t \, dt$
- (5) Calculer:  $I_3 = \int_1^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$
- (6) Calculer la primitive qui s'annule en 0 de :

$$f: ]-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 1}$$

- 7 Déterminer une primitive de :  $f: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$
- (8) Calculer:

$$I_4 = \int_1^{\frac{5}{2}} \frac{3x - 4}{2x^2 + 3x - 2} dx \qquad I_5 = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$$

$$I_6 = \int_1^2 \frac{x dx}{x^2 - 4x + 7} \qquad I_7 = \int_0^3 \frac{4 - 5x}{x^2 - 8x + 16} dx$$

(9) Calculer:

$$I_8 = \int_0^\pi x \cos x \, dx$$
  $F(x) = \int_0^x \arctan t \, dt$ 

(10) Calculer les intégrales suivantes.

$$I_9 = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t}$$
 en posant  $x = e^t$ 

$$I_{10} = \int_{1}^{2} \frac{3t^2 - 2}{3t - 2} dt$$
 en posant  $x = 3t - 2$ 

$$I_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{en posant} \quad t = \tan \frac{x}{2}$$
 puis en posant  $\quad x = \frac{\pi}{2} - t.$ 

## \_ Travaux dirigés \_\_\_\_\_

1 Calculer une primitive de chacune des fonctions

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2 + 3x - 10}$$
  $f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 1}$ 

$$f_3(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$$
  $f_4(x) = \frac{x}{4x^2 + 4x + 1}$ 

$$f_5(x) = \frac{1}{8x^2 + 50}$$
  $f_6(x) = \frac{9}{x^2 - 9x}$ 

$$f_7(x) = \frac{x}{x^2 - 8x + 20}$$
  $f_8(x) = \frac{1}{1 - 3x + \frac{9}{2}x^2}$ 

2 Calculer une primitive des fonctions

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$
 sur l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$ .

3 Calculer les intégrales suivantes

$$I_{1} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^{2} - 1}} \qquad I_{2} = \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos x} dx$$
$$I_{3} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} \qquad I_{4} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}$$

à l'aide des changements de variables  $t=\frac{1}{r}, t=$  $\cos x$  et  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

4 Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan t\right) \mathrm{d}t$$

en utilisant un changement de variable affine échangeant ses bornes.

**5** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

a. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire que la suite  $(I_n)$  converge.

- b. Calculer  $I_{n-1} + I_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

c. Déterminer la limite de la suite : 
$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

6 Déterminer, pour chacune des intégrales suivantes, quelle méthode permet de la calculer : primitives usuelles, manipulation d'expressions polynomiales et décomposition en éléments simples, linéarisation d'expressions trigonométriques, intégration par parties, changement de variable (dire lequel), autre.

$$\begin{split} I_1 &= \int_0^4 \frac{2t}{t+2} \, \mathrm{d}t & I_2 = \int_{-1}^1 \frac{3t-4}{(t-2)^2} \, \mathrm{d}t & I_3 = \int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2} \, \mathrm{d}t & I_4 = \int_0^1 \frac{t^2+t+1}{2t+1} \, \mathrm{d}t \\ I_5 &= \int_4^8 \frac{4 \, \mathrm{d}t}{t^2-4t+3} & I_6 = \int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+a)} & \mathrm{avec} \ a \neq 0 & I_7 = \int_0^1 \frac{4t+1}{t^2+1} \, \mathrm{d}t \\ I_8 &= \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+4} \, \mathrm{d}t & I_9 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{8t \, \mathrm{d}t}{(3t^2-2)^4} & I_{10} = \int_{-1}^0 \frac{t \, \mathrm{d}t}{t^4-4} & I_{11} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(t^3+2)} \\ I_{12} &= \int_0^1 \frac{t \, \mathrm{d}t}{t^4-t^2-2} & I_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} t(2t-1)^8 \, \mathrm{d}t & I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t \, \mathrm{d}t & I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^2 \, \mathrm{d}t \\ I_{16} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\sin^2 t} t\cos^2 t \, \mathrm{d}t & I_{17} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t \, \mathrm{d}t}{8+\sin^2 t} & I_{18} = \int_0^x t^3 e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t & I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t} \cos 3t \, \mathrm{d}t \\ I_{20} &= \int_{-\ln 3}^{\ln 3} e^{-t} \, \mathrm{ch} \, t \, \mathrm{d}t & I_{21} = \int_{-2}^2 t \, \mathrm{sh} \, t \, \mathrm{d}t & I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cos 2t \, \mathrm{d}t & I_{23} = \int_0^{\ln 2} \mathrm{ch} \, t \, \mathrm{sh} \, 2t \, \mathrm{d}t \\ I_{24} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \left(t + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(t - \frac{\pi}{3}\right) \, \mathrm{d}t & I_{25} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos t \, \mathrm{d}t & I_{26} = \int_0^A t^2 e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ I_{27} &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t} & I_{28} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t+1}} & I_{29} = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t-1}} & I_{30} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} \\ I_{31} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t \, \mathrm{d}t}{\cos^2 t} & I_{32} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t \, \mathrm{d}t}{\cos t} & I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 t}{1+4\sin^2 t} \, \mathrm{d}t & I_{34} = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \\ I_{35} &= \int_1^6 \frac{\ln^n t \, \mathrm{d}t}{t} & I_{36} &= \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{t^2+1} \, \mathrm{d}t & I_{37} = \int_1^6 \frac{\ln(t^2+4)}{t^2} \, \mathrm{d}t & I_{38} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \\ I_{36} &= \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{t^2+1} \, \mathrm{d}t & I_{37} = \int_1^6 \frac{\ln(t^2+4)}{t^2} \, \mathrm{d}t & I_{38} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \\ I_{40} &= I_{40} + I_{$$

Calculer ensuite ces intégrales.

On pourra puiser dans la liste suivante de changements de variables utiles : x = at + b avec (a, b) à déterminer,  $x = t^2$ ,  $x = t^3$ ,  $x = \tan t$ ,  $x = \cos t$ ,  $x = e^t$ ,  $x = \sqrt{t+1}$ ,  $x = \sqrt{e^t - 1}$ ,  $t = \sin x$ ...

## Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ . Soit N un entier naturel. Pour tout entier m tell que $0 \le m \le N$ on note:

- a. Justifier que F est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- b. Appliquer le changement de variable  $t = \frac{1}{u}$  à F(x) et en déduire que F est nulle.
- c. Justifier que la fonction  $\varphi: t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$  admet une primitive  $\Phi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et exprimer F en fonction de

En déduire que F est dérivable, calculer sa dérivée et retrouver le résultat précécent.

8 On note F la primitive s'annulant en 0 de :

$$f: x \mapsto \frac{1}{1 + \cos x}$$

- a. Exprimer F(x) à l'aide d'une intégrale, et préciser sur quel intervalle maximal elle est définie.
- b. Calculer F(x) en utilisant le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

Exprimer le résultat en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$ .

$$I_m = \int_0^1 x^m (1-x)^{N-m} \, \mathrm{d}x$$

- a. Calculer  $I_0$ .
- b. Démontrer que pour tout  $m \in \{0, ..., N-1\}$ :

$$I_{m+1} = \frac{m+1}{N-m} I_m$$

 $I_{m+1} = \frac{m+1}{N-m} I_m$ c. En déduire une formule générale pour  $I_m$  et la démontrer par récurrence.

Vérifier cette formule pour  $I_N$ .

d. Donner pour tout  $(m,n) \in \mathbb{N}^2$  la valeur de :

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, \mathrm{d}x$$

10 Soit f une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $\overline{x \in \mathbb{R}}$  on pose :

$$\Phi(x) = \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

- a. Justifier que la fonction  $\Phi$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Justifier que  $\Phi$  est dérivable, et calculer sa dérivée.