## TD. A5

## Fonctions usuelles

## Exercices de cours \_\_\_\_\_

- (1) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :  $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ sh 2x = 2 ch x sh xDonner une formule pour th 2x en fonction de bx.
- (2) Calculer  $\arcsin 2\pi$  $\arccos \cos -\frac{11\pi}{6}$  $\arccos \sin \frac{2\pi}{3}$  $\arcsin\cos\frac{47\pi}{3}$
- (3) Démontrer que :  $\forall x \in ]-1,1[$  tan  $\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  $\forall x \in \mathbb{R}$   $\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- (4) Les relations suivantes sont-elles valables pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ?

$$\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor \quad \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \quad \lfloor xy \rfloor = \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$$

(5) Démontrer que pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :  $|x| + |y| \le |x + y| \le |x| + |y| + 1$ 

## \_ Travaux dirigés \_\_\_\_

- 1 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.
- a.  $\operatorname{sh} x = \sqrt{3}$
- b.  $\operatorname{ch} x = \sqrt{3}$
- c. th  $x = \frac{2}{3}$
- d. 12 ch x = 25 th x
- e.  $ch x = \frac{5}{3}$
- f.  $19 \sinh x 16 \cosh x = 4$
- g.  $3 \cosh 2x 4 \cosh x = 7$  h.  $16 \sinh x \cosh x = 15$
- i. sh 2x = ch x

- j.  $\sinh x + \frac{2}{\sinh x} = 3$
- k.  $6 \operatorname{ch} x 7 \operatorname{sh} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$
- **2** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$  calculer :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} \operatorname{ch}(kx)$$
 et  $S_n = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} \operatorname{sh}(kx)$ 

- 3 Dériver les fonctions suivantes.
- a.  $f(x) = \sinh x + \frac{1}{3} \sinh^3 x$  b.  $f(x) = \frac{1}{3} \cosh^3 x \cosh x$
- c.  $f(x) = th x \frac{1}{3} th^3 x$  d.  $f(x) = \frac{ch x cos x}{sh x + sin x}$
- e.  $f(x) = \operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x$
- 4 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes.
- a. ch, sh et th
- en  $0, +\infty$  et  $-\infty$
- b.  $x \mapsto \operatorname{ch} x 1$
- en 0
- c.  $x \mapsto |x|$
- $en +\infty$
- d. arcsin et arctan en 0.

- 5 Calculer les limites suivantes.
- a.  $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh 3x}{\sinh 2x}$
- b.  $\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n e^n}{\operatorname{ch} n}$
- c.  $\lim_{x \to +\infty} (\operatorname{ch} 2x) \ln (\operatorname{th} x)$  d.  $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + i \frac{\pi}{2}\right)^n$
- 6 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes.
- a.  $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$
- b.  $x \mapsto \operatorname{sh}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)$  en 0 et en  $+\infty$
- c.  $x \mapsto \tan \arcsin \frac{x}{x+1}$
- en 0 et en  $+\infty$ .
- 7 On souhaite étudier les fonctions arctan et th au voisinage de  $+\infty$ .
- a. Donner un équivalent simple au voisinage de  $+\infty$ de arctan x, puis de  $\frac{\pi}{2}$  – arctan x
- b. En déduire le développement asymptotique suivant:

$$\arctan x = \frac{\pi}{(+\infty)} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- c. En procédant de même donner un développement asymptotique similaire pour la fonction th en  $+\infty$ .
- 8 Calculer les réels suivants.

- $a = \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) \qquad b = \sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$   $c = \sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right) \qquad d = \tan\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$   $e = \cos\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right) \qquad f = \sin\left(\arctan\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

- $g = \tan\left(2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$   $h = \sin\left(2\arctan 3\right)$
- $i = \tan \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$
- |9| Résoudre les équations suivantes sur  $\mathbb{R}$ .
- a.  $\arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$
- b.  $\arccos \frac{x+1}{2} = \arcsin x$
- c.  $\arcsin(2x) \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$
- d.  $\arcsin x = 2 \arccos x$
- e.  $\arccos x + \arccos (1-x) = \frac{\pi}{2}$
- f.  $\arcsin x = \arctan 2x$
- g.  $\arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{2}$
- 10 Calculer:
- $a = \arctan 2 + \arctan 3$  et  $b = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$
- $c = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$
- $d = 4 \arctan \frac{1}{5} \arctan \frac{1}{230}$

11 Étudier les fonctions suivantes.

a. 
$$f(x) = 5 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{sh} x$$
 b.  $f(x) = \arccos(2x^2 - 1)$ 

c. 
$$f(x) = \arctan \sinh x$$

c. 
$$f(x) = \arctan \sinh x$$
 d.  $f(x) = \sin (2 \arctan e^x)$ 

e. 
$$f(x) = \arcsin \operatorname{th} x + \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

f. 
$$f(x) = \arcsin \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$
 g.  $f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$ 

**12** Démontrer que pour tout  $x \in ]-1,1[$ :

$$\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Peut-on exprimer de façon aussi simple  $\arccos x$  en fonction d'un arc-tangente?

**13** Pour tout  $x \in [1, +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$A(x) = \arctan \frac{x}{x+1} - \arctan \frac{x-1}{x}$$
  
et  $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{2k^2}$ 

- a. Démontrer que pour tout  $x \in [1, +\infty[, A(x)$ appartient à  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .
- b. Simplifier A(x) en calculant sa tangente.
- c. Calculer  $S_n$ .

14 On note:

$$f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)\right)\right)$$

- a. Démontrer que f est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Simplifier l'expression de f(x).

Indication: calculer  $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ .

15 On définit les fonctions :

$$f_1 = \arcsin \circ \sin$$

$$f_2 = \arccos \circ \cos$$

$$f_3 = \arctan \circ \tan$$

- a. Déterminer l'ensemble de définition et une période de  $f_3$ , puis tracer sa courbe.
- b. Déterminer l'ensemble de définition, une période et la parité de  $f_2$ , puis tracer sa courbe.
- c. Déterminer l'ensemble de définition et une période de  $f_1$ , calculer  $f_1(\pi - x)$ , puis tracer sa
- d. Démontrer que pour tout x dans l'ensemble de définition de  $f_3$ :

$$f_3(x) = x - \pi \left| \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right|$$

**16** Pour tout réel x on note [x] le plus petit entier supérieur ou égal à x, appelé plafond de x.

Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :  $\lceil x \rceil = -|-x|$ 

| 17 | Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$m\lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor mx\rfloor \leqslant m\lfloor x\rfloor + m - 1$$

En déduire que :

$$\left| \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \right| = \lfloor x \rfloor$$

| 18 | Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a. 
$$[3x] = 2x + 5$$

b. 
$$|2x| = |x+4|$$

$$\left| \text{ c. } \left| \frac{x-1}{x+3} \right| = 2$$

a. 
$$\lfloor 3x \rfloor = 2x + 5$$
 b.  $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor$  c.  $\lfloor \frac{x-1}{x+3} \rfloor = 2$  d.  $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 + 3$