Devoir à la Maison n°3
Le problème de Bâle

Le but de ce problème est de démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$

1. Soit $R_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k(k-1)}$, défini pour tout entier $n\geqslant 2$.
   (a) Simplifier $\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ et en déduire une expression de R_n sans signe somme.
   (b) Justifier que pour tout entier $n\geqslant 2$: $S_n\leqslant 1+R_n$.
   (c) Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2.
   (d) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

On note $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

La question de la valeur de ℓ a été posée par Pietro Mengoli en 1644 et étudiée à Bâle par Jacques Bernoulli. Le problème a été résolu en 1741 par Leonhard Euler, toujours à Bâle.

2. (a) Rappeler pourquoi pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$:
$$0\leqslant\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$$
   (b) En déduire que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:
$$\frac{1}{\sin^2 x}-1\leqslant\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{\sin^2 x}$$
   (c) Démontrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:
$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{4}{\sin^2(2x)}$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$.
   (a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$S_{2n+1}=\frac{1}{4}S_n+T_n$$
   (b) En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et exprimer sa limite en fonction de ℓ.

4. On pose maintenant :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \quad x_{k,n} = \frac{2k+1}{2^n} \times \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n})}$$

   (a) Calculer u_1.

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x_{j,n+1}\right)}$$

   Pour ceci on utilisera le changement d'indice $j = 2^n - 1 - k$.

   (c) En utilisant la question (2c) démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 4u_n$.

   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{4^{n+1}}{\pi^2} T_{2^{n-1}-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(x_{k,n})^2}$$

   (b) En utilisant la question (2b), démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\pi^2}{4^{n+1}} u_n - \frac{\pi^2}{2^{n+3}} \leqslant T_{2^{n-1}-1} \leqslant \frac{\pi^2}{4^{n+1}} u_n$$

   (c) Calculer la limite de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire la valeur de ℓ.