## Devoir à la Maison n°3

Une suite à croissance très rapide

1. Soit a un réel strictement supérieur à 1. Démontrer que :  $n^n = o(a^{2^n})$ 

Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0=2$  et pour tout  $n\in\mathbb{N}$  :  $u_{n+1}=u_n^2-1$ .

- 2. Limite de  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .
  - (a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est minorée par 2.
  - (b) Démontrer qu'elle est croissante.
  - (c) Démontrer qu'elle diverge vers  $+\infty$ .
- 3. Vitesse de divergence.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$ 

- (a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $0 \leqslant v_n v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{u_{n+1}}$
- (b) Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Démontrer que pour tout entier  $n \ge p$ :

$$0 \leqslant v_p - v_n \leqslant \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{u_{p+1}} \tag{*}$$

- (c) En déduire que la suite  $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est minorée par  $\ln 2 \frac{1}{3}$  puis quelle converge, et enfin que sa limite est un réel  $\ell$  strictement positif.
- (d) À l'aide de l'encadrement  $(\star)$ , démontrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}$$
  $2^p \ell \leqslant \ln u_p \leqslant 2^p \ell + \frac{1}{u_{p+1}}$ 

(e) On pose  $a = e^{\ell}$ , si bien que a > 1. Démontrer que :  $u_n \sim a^{2^n}$ .