Lycée Bellevue – Toulouse **13 octobre 2025**
MPSI – Mathématiques

Corrigé du Devoir à la Maison n°2

Problème 1.

1. La fonction exponentielle est dérivable en 0, de dérivée $e^0 = 1$, donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^0}{t-0} = 1 \qquad \text{soit} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

   La fonction exponentielle est convexe car elle est deux fois dérivable, égale à sa dérivée seconde, laquelle est positive sur $\mathbb{R}$.

   Sa tangente en 0 admet pour équation $y = x+1$, elle est en-dessous de sa courbe par convexité, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x \geqslant 1 + x.$$

2. La fonction f est définie en tout x non-nul, donc sur $\mathbb{R}^*$.

   Elle est dérivable par composition et produit. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

   Cette dérivée est du signe de $\frac{x+1}{x}$. Un tableau de signe montre qu'elle est négative sur $[-1, 0[$ et positive sur $]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$.

   Comme $-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ et $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ alors par composition et produit de limites : $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

   Comme $-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ alors de même : $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

   Pour la limite en 0 par valeurs inférieures on utilise le changement de variable $y = -\frac{1}{x}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{e^y}{y}$$

   Par croissances comparées cette limite est égale à $-\infty$ donc : $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$.

   En résumé on peut tracer le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-e$	↘ $-\infty$	‖ 0	↗	$+\infty$

3. (a) On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Cette limite est finie donc on prolonge par continuité la fonction g en posant $g(0) = 0$.

   (b) On calcule, pour tout $x > 0$:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = e^{-\frac{1}{x}}$$

   On en déduit :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$$

   Ceci montre que la fonction g est dérivable en 0 de dérivée $g'(0) = 0$.

4. (a) On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) - (x-1) = x\Big(e^{-\frac{1}{x}} - 1\Big) + 1.$$

   En posant $t = -\frac{1}{x}$ on obtient :

$$f(x) - (x-1) = -\frac{1}{t}\Big(e^t - 1\Big) + 1 = 1 - \frac{e^t - 1}{t}$$

   Comme $\frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$ alors :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (x-1)\big) = 1 - \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 0.$$

   La droite d'équation $y = x - 1$ est donc asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$.

   (b) Le calcul de la question précédente donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) - (x-1) = x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

   On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^t \geqslant 1 + t$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad e^{-\frac{1}{x}} \geqslant 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{puis} \qquad e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x} \geqslant 0$$

   Ainsi :

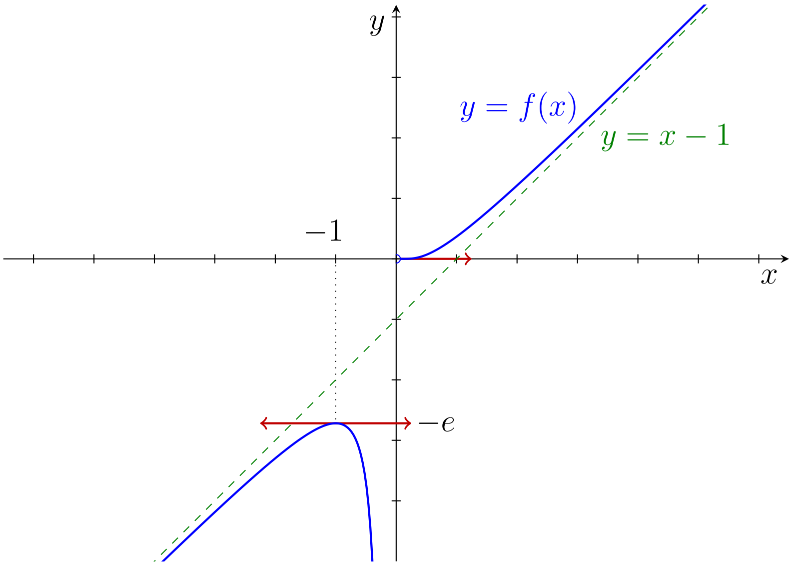
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \begin{cases} f(x) - (x-1) \geqslant 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ f(x) - (x-1) \leqslant 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   Ceci montre que la courbe représentative de f est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = x - 1$ si $x > 0$ et en-dessous si $x < 0$.

5. La courbe de f admet deux asymptotes : une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ en $\pm\infty$, comme nous venons de le voir, et une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

   On calcule $f(-1) = -e$.

   La courbe de f figure page suivante.



Problème 2.

1. (a) Comme ω est différent de 1 alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\omega^k = \frac{1-\omega^5}{1-\omega}$.

   Comme ω est une racine $5^{\text{ème}}$ de l'unité alors $\omega^5 = 1$ donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\omega^k = 0$.

   (b) On calcule : $z_1^2 = (\omega + \omega^4)^2 = \omega^2 + 2\omega^5 + \omega^8$.
   Comme $\omega^5 = 1$ alors : $z_1^2 = \omega^2 + 2 + \omega^3$.

   On en déduit : $\displaystyle z_1^2 + z_1 - 1 = \omega^2 + \omega^3 + \omega + \omega^4 + 1 = \sum_{k=0}^{4}\omega^k$

   D'après la question précédente : $z_1^2 + z_1 - 1 = 0$.
   De même : $z_2^2 = (\omega^2 + \omega^3)^2 = \omega^4 + 2\omega^5 + \omega^6 = \omega^4 + 2 + \omega$.

   Donc : $\displaystyle z_2^2 + z_2 - 1 = \sum_{k=0}^{4}\omega^k = 0$.

   Ainsi z_1 et z_2 satisfont l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

   (c) Les solutions de l'équation ci-dessus sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Posons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, et $z_1 = \omega + \omega^4$, $z_2 = \omega^2 + \omega^3$.
   Alors ω est une racine $5^{\text{ème}}$ de l'unité différente de 1, donc z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$, et ainsi ils prennent l'une des valeurs $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
   D'autre part :

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega + \omega^4 &&= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} &&= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} &&= 2\cos\tfrac{2\pi}{5} \\ z_2 &= \omega^2 + \omega^3 &&= e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} &&= e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} &&= 2\cos\tfrac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

   Comme $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{4\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ alors $\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant 0$ et $\cos\frac{4\pi}{5} \leqslant 0$, donc $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $z_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, ce qui donne :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

Comme $\frac{\pi}{5} = \pi - \frac{4\pi}{5}$ alors $\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}$ donc :

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

2. (a) Par équivalence :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad z^5 = i \quad \Longleftrightarrow \quad z^5 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^5$$

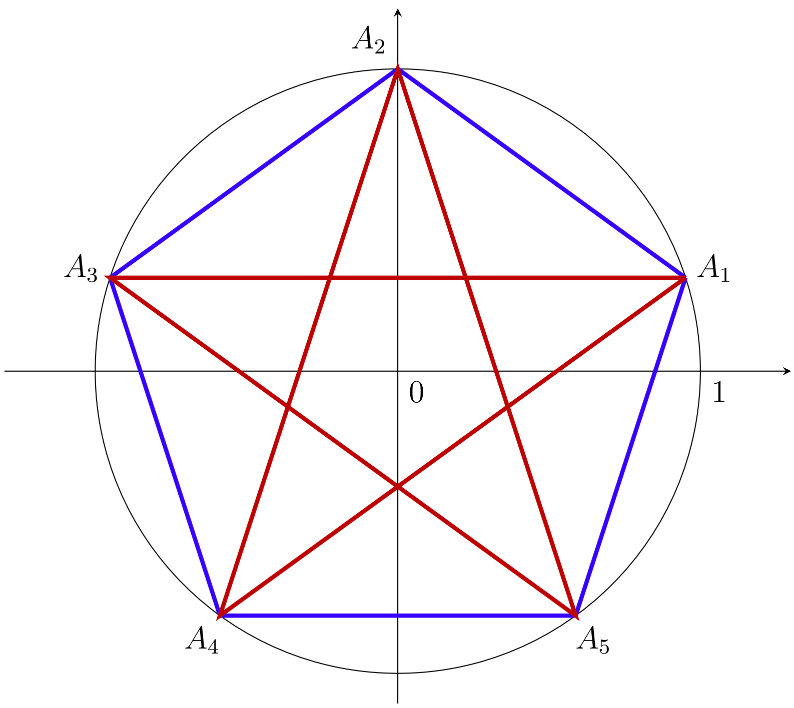
On en déduit :

$$z^5 = i \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = e^{i\frac{\pi}{10}}\zeta \quad \text{où} \quad \zeta \in \mathbb{U}_5$$

On sait que $\mathbb{U}_5 = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{5}} \;\middle|\; k = 0, \dots 4 \right\}$, donc on en déduit que les solutions de l'équation $z^5 = i$ sont :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{10}} \qquad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{10}} = i \qquad z_3 = e^{i\frac{9\pi}{10}} \qquad z_4 = e^{i\frac{13\pi}{10}} \qquad z_5 = e^{i\frac{17\pi}{10}}$$

(b) On obtient la figure suivante :



(c) En factorisant par l'angle moyen on calcule :

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \left| \frac{e^{i\frac{9\pi}{10}} - e^{i\frac{\pi}{10}}}{e^{i\frac{5\pi}{10}} - e^{i\frac{\pi}{10}}} \right| = \left| \frac{e^{i\frac{5\pi}{10}}\left(e^{i\frac{2\pi}{5}} - e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)}{e^{i\frac{3\pi}{10}}\left(e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)} \right|$$

$$= \left| e^{i\frac{\pi}{5}} \times \frac{2i\sin\frac{2\pi}{5}}{2i\sin\frac{\pi}{5}} \right| = \left| e^{i\frac{\pi}{5}} \right| \times \left| \frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} \right| = 2\left|\cos\frac{\pi}{5}\right|$$

Finalement :
$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$