Corrigé du Devoir à la Maison n°2

1. La fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\varphi' : x \mapsto 3x^2$. Cette dérivée est strictement positive, sauf au point 0. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle ceci montre qu'elle est strictement croissante.

   De plus elle est continue, et ses limites sont respectivement $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$, donc par théorème elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Soit x_0 un réel non-nul. Alors, pour tout $x \neq x_0$:

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$$

   La formule

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

   montre que :

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}}$$

   Et donc :

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$$

   Ceci montre que ψ est dérivable en x_0 et que $\psi'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$.

   Une autre méthode est d'utiliser la formule donnant la dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\psi(x) = x^{\frac{1}{3}}$ alors $\psi'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Mais celle-ci n'est valable que sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Pour la dérivabilité en 0 on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

   On en déduit :

$$\frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty.$$

   Ainsi la fonction ψ n'est pas dérivable en 0.

   Comme la limite du taux d'accroissement est infinie alors on peut ajouter que sa courbe admet une tangente verticale en ce point.

   Finalement la fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est :

$$\begin{array}{rccc} \psi' : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \end{array}.$$

3. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.

   Supposons que $\sqrt[3]{x_1} \geqslant \sqrt[3]{x_2}$. Comme la fonction cube est croissante alors $x_1 \geqslant x_2$, ce qui est faux. Donc $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$.

   On a démontré que pour tout réels x_1 et x_2, si $x_1 < x_2$ alors $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$. Donc la fonction racine cubique est strictement croissante.

4. (a) Comme la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $x \mapsto x^3 - 1$ est dérivable et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $x \neq 1$ alors $x^3 - 1$ est non-nul, donc par composition la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}^2}. \end{aligned}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x - 1}$$

   On utilise encore la formule pour $a^3 - b^3$:

$$\frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)}}{x - 1} = \sqrt[3]{\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}}$$

   On en déduit :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$$

   La fonction f n'est donc pas dérivable en 1.

   Comme la limite du taux d'accroissement est infinie alors sa courbe admet une tangente verticale en ce point.

5. La formule pour $a^3 - b^3$ donne :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \qquad a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$$

   On en déduit :

$$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3 - 1} - x = \frac{x^3 - 1 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 - 1}^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + x^2} = \frac{-1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + x^2}$$

   Ceci montre que :

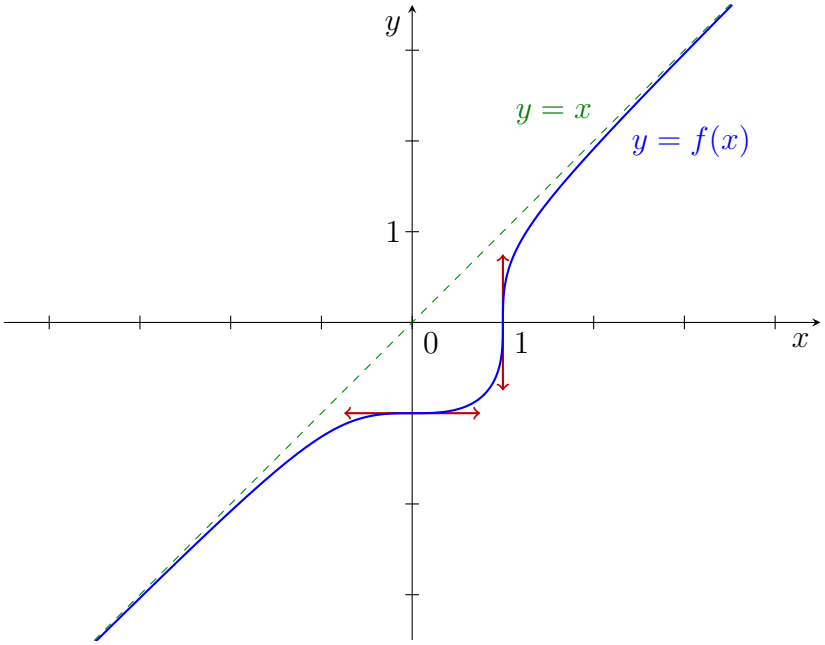
$$f(x) - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) - x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

   En conséquence la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^3 - 1 < x^3$, et comme la fonction racine cubique est strictement décroissante alors $\sqrt[3]{x^3 - 1} < x$, c'est-à-dire $f(x) < x$.

   Ceci montre que la courbe de f est en-dessous de son asymptote d'équation $y = x$.

6. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}^2}$. Cette dérivée est positive donc f est croissante sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
On calcule $f(0) = -1$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 0$. On obtient une courbe comme la suivante.



7. Soit x et y deux réels. Alors par équivalences :

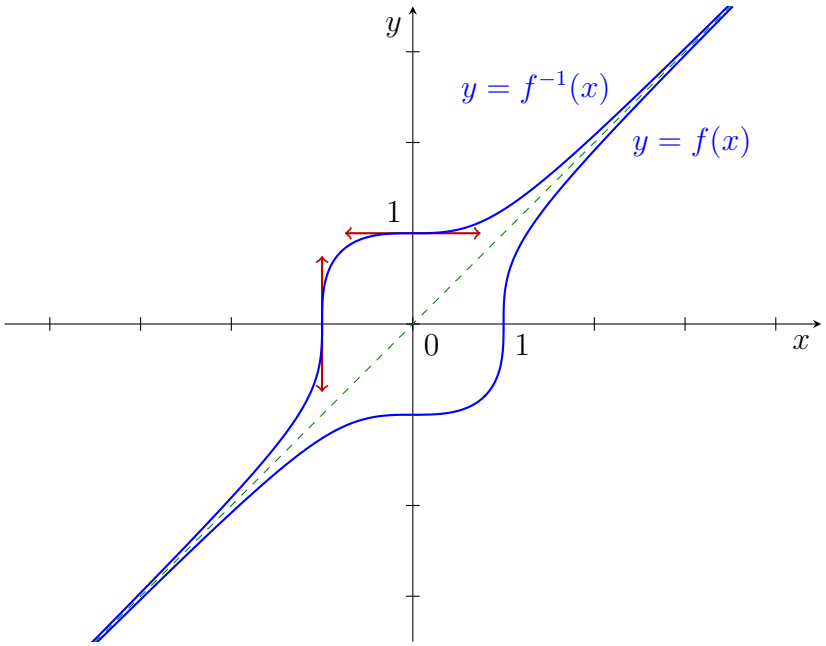
$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \sqrt[3]{x^3 - 1} \\ &\iff y^3 = x^3 - 1 \\ &\iff y^3 + 1 = x^3 \iff \sqrt[3]{y^3 + 1} = x \end{aligned}$$

Ceci montre que tout réel y admet $x = \sqrt[3]{y^3 + 1}$ pour antécédent par f, et donc la fonction f est bijective, et sa réciproque est :

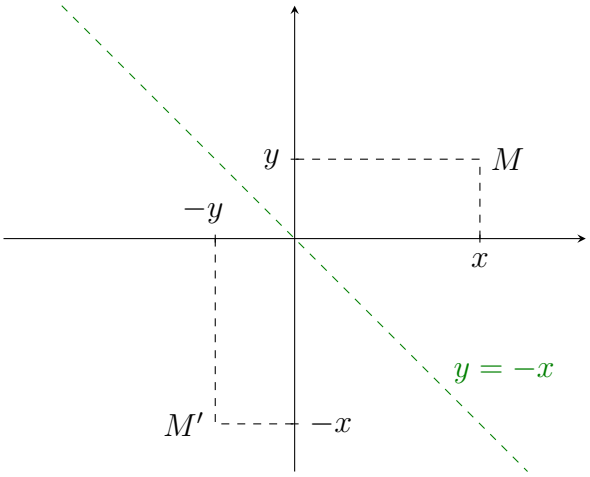
$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x^3 + 1} \end{aligned}$$

Pour tracer la courbe de f^{-1} il suffit de tracer la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice des axes.

Voir la courbe page suivante.



8. Soit M un point de coordonnées (x, y). Alors le point symétrique de M par rapport à la seconde bissectrice des axes est le point M' de coordonnées $(-y, -x)$.



Soit M un point de la courbe de f, de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in \mathbb{R}$.

Le point symétrique de M est alors le point M' de coordonnées $(-f(x), -x)$. Il est sur la courbe de f si et seulement si $-x = f(-f(x))$.

On calcule :

$$f(-f(-x)) = f\left(-\sqrt[3]{(-x)^3 - 1}\right) = f\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right) = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} = x$$

Ceci montre que le point M' est sur la courbe de f.

Ceci étant vrai pour tout point de la courbe de f, celle-ci est bien symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -x$.