Corrigé du Devoir Surveillé n°2

Exercice 1. (12 points)

1. (a) (2 points) Le discriminant de l'équation (E) est :

$$\Delta = (-2e^{i\theta})^2 - 4 \times (-1) = 4(e^{2i\theta} + 1) = 4e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 8e^{i\theta}\cos\theta$$

Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\cos \theta \ge 0$ donc l'écriture précédente est l'écriture exponentielle de Δ .

On en déduit :

$$|\Delta| = 8\cos\theta$$
 et $\arg\Delta = \theta$

(b) (1 point) Une racine carrée de Δ est $\eta=\sqrt{8\cos\theta}e^{i\theta/2}$, donc les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = e^{i\theta} + \sqrt{2\cos\theta} e^{i\theta/2}$$
 et $z_2 = e^{i\theta} - \sqrt{2\cos\theta} e^{i\theta/2}$

2. (a) (1 point) Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, ce qui montre que $\cos \frac{\theta}{2} > 0$.

On en déduit que $2\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{2\cos\theta}$ est positif puisqu'il est la somme de deux nombres positifs.

On remarque que le produit des deux nombres est :

$$\left(2\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{2\cos\theta}\right)\left(2\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{2\cos\theta}\right) = 4\cos^2\frac{\theta}{2} - 2\cos\theta$$

La formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ montre que :

$$\left(2\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{2\cos\theta}\right)\left(2\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{2\cos\theta}\right) = 2$$

Ainsi le produit des deux nombres est positif, le premier est positif, donc ils sont tous les deux positifs, et même strictement positifs.

(b) (1 point) On utilise encore la factorisation par l'angle moitié :

$$z_1 + 1 = e^{i\theta} + 1 + \sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2} = e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right) + \sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2}$$
$$= \left(2\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{2\cos\theta}\right)e^{i\theta/2}$$
$$z_2 + 1 = \left(2\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{2\cos\theta}\right)e^{i\theta/2}$$

D'après la question précédente les deux facteurs réels sont positifs, donc ces égalités sont bien des écritures exponentielles.

(c) (2 points) D'après les écritures précédentes, les arguments des trois complexes z_1+1 , z_2+1 et $e^{i\theta}+1$ sont $\frac{\theta}{2}$.

Or ce sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$ et \overrightarrow{BP} . Donc ces trois vecteurs sont colinéaires, autrement dit les quatre points B, M_1 , M_2 , P sont alignés.

On peut en déduire que les points M_1 et M_2 sont sur la droite (BP).

3. (a) (2 points) Toujours grâce à l'angle moitié on obtient :

$$z_1 - 1 = e^{i\theta} - 1 + \sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) + \sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2}$$

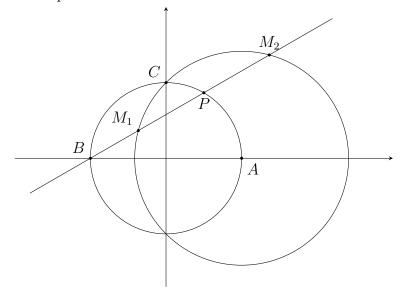
$$= \left(\sqrt{2\cos\theta} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$$
et
$$z_2 - 1 = \left(-\sqrt{2\cos\theta} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$$

On peut alors calculer leurs modules :

$$|z_1 - 1| = \left| \sqrt{2\cos\theta} + 2i\sin\frac{\theta}{2} \right| \times \left| e^{i\theta/2} \right| = \sqrt{(\sqrt{2\cos\theta})^2 + \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2}$$

De même : $|z_2 - 1| = \sqrt{2}$

- (b) (1 point) Les complexes $z_1 1$ et $z_2 1$ sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AM_2}$. Leurs modules sont donc les distances AM_1 et AM_2 . D'après le résultat précédent, M_1 et M_2 sont sur le cercle de centre A de rayon $\sqrt{2}$. La distance AC est aussi égale à $\sqrt{2}$ donc ce cercle est le cercle de centre A passant par le point C.
- 4. (2 points) Le point P étant connu, les points M_1 et M_2 sont à la fois sur la droite (BP) et sur le cercle précédent. En construisant cette droite et ce cercle, on obtient les points M_1 et M_2 comme les points d'intersection.



Problème.

Partie A. (10 points)

1. (1 point) La fonction che st définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
 $\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x.$

Elle est donc paire.

La fonction exponentielle est dérivable, donc par somme la fonction ch est dérivable.

2. (1 point) On obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
 $\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Par équivalences:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}'(x) \geqslant 0 \iff e^x \geqslant e^{-x} \iff e^{2x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$$

Ceci montre que la fonction che st décroissante sur \mathbb{R}_{-} et croissante sur \mathbb{R}_{+} .

3. (1 point) On remarque que :

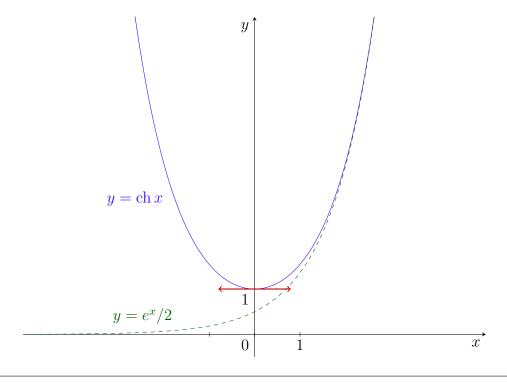
$$\frac{e^{-x}}{e^x} = e^{-2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Ceci montre que $e^{-x} = o(e^x)$, donc :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{2}$ est un équivalent simple de la fonction ch au voisinage de $+\infty$.

4. (1.5 points) On calcule ch 0 = 1, et on obtient une courbe comme la suivante.



5. (1,5 points) En explicitant les cosinus hyperboliques :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2 \operatorname{ch}^{2} x - 1 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2} \qquad 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{(e^{x} + e^{-x})(e^{y} + e^{-y})}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} + \frac{e^{x-y} + e^{-x+y}}{2} = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)$$

Les formules sont démontrées.

1. (a) (2 points) On sait que la fonction chest croissante sur \mathbb{R}_+ .

De plus sa dérivée est ch': $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Cette dérivée ne s'annule qu'en 0, donc la fonction ch est strictement croissante que \mathbb{R}_+ .

De plus elle est continue et \mathbb{R}_+ est un intervalle donc d'après le théorème de la bijection elle réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans $\operatorname{ch}(\mathbb{R}_+)$.

Comme ch0 = 1 et $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ alors $\operatorname{ch}(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$, et donc ch réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans $[1, +\infty[$.

Comme $y \in [1, +\infty[$ alors par définition d'une bijection y admet un et un seul antécédent dans \mathbb{R}_+ par la fonction ch.

(b) (2 points) On résout l'équation ch x = y d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_{+} \qquad \operatorname{ch} x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = y$$

$$\iff \quad e^{x} + e^{-x} - 2y = 0$$

$$\iff \quad X^{2} - 2yX + 1 = 0 \qquad \text{en posant} \quad X = e^{x}.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 4(y^2 - 1)$. Comme $y \ge 1$ il est positif, et les solutions sont

$$X_1 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$
 et $X_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$.

Le produit de ces deux racines est égal à 1, car ce sont les solutions de l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Elles sont donc de même signe, et comme X_2 est positive alors elles sont toutes les deux positives.

Comme $X = e^x$ alors $x = \ln X_1$ ou $x = \ln X_2$.

De plus $\ln X_1 + \ln X_2 = \ln X_1 X_2 = \ln 1 = 0$, donc $\ln X_1$ et $\ln X_2$ sont de signes opposés, et même $\ln X_2 = -\ln X_1$.

Comme $X_1 \leqslant X_2$ alors $\ln X_1 \leqslant \ln X_2$ et donc $\ln X_1 \leqslant 0$ et $\ln X_2 \geqslant 0$.

L'unique solution positive de l'équation $\operatorname{ch} x = y$ est donc $x = \ln X_2$, soit :

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Partie B. (13 points)

Pour les questions 1 à 5 on suppose que f est une solution du problème, donc que f est une fonction de $\mathbb R$ dans $\mathbb R$ continue, vérifiant :

$$\exists a \in \mathbb{R}_{+}^{*} \qquad f(a) > 1$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2} \qquad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \tag{*}$$

1. (a) (1 point) La relation (\star) avec x = a et y = 0 donne:

$$2f(a) = 2f(a)f(0)$$

Comme f(a) > 1 alors $f(a) \neq 0$, donc f(0) = 1.

(b) (1 point) La fonction f est définie sur $\mathbb R$ qui est symétrique par rapport à 0.

Pour x = 0 la relation (*) donne :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$$

Par soustraction:

$$\forall y \in \mathbb{R}$$
 $f(-y) = f(y)$

La fonction f est donc paire.

2. (a) (1 point) Pour x = y la relation (\star) donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) + f(0) = 2(f(x))^2$$

Si $x \in \mathbb{R}$ alors $\frac{x}{2} \in \mathbb{R}$, et comme f(0) = 1 alors on obtient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
 $f(x) = 2\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1$ (\dagger)

(b) (1 point) Supposons qu'il existe un réel x tel que f(x) < -1. Alors la relation précédente donne :

$$2f^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 < -1$$

Ceci implique $f^2\left(\frac{x}{2}\right) < 0$, ce qui est absurde.

Cette contradiction montre que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \ge -1$.

(c) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note \mathcal{P}_n la propriété : $f\left(\frac{a}{2^n}\right) > 1$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme f est solution du problème alors f(a) > 1, donc la proposition \mathcal{P}_0 est vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la proposition \mathcal{P}_n est vraie.

D'après la relation (†), pour $x = \frac{a}{2^n}$:

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 2f^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) - 1$$

Ceci donne:

$$f^{2}\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a}{2^{n}}\right) + 1\right)$$

Comme la proposition \mathcal{P}_n est supposée vraie alors $f\left(\frac{a}{2^n}\right)>1$ et donc :

$$f^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Ceci montre que $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) > 1$ ou $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) < -1$.

D'après la question précédente on ne peut avoir $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) < -1$, donc $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) > 1$. La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

On a démontré que la propriété \mathcal{P} est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f\left(\frac{a}{2^n}\right) > 1$$

3. (a) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note \mathscr{P}_n la propriété : $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2^n}\right)$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme β est antécédent de f(a) par la fonction ch alors ch $\beta = f(a)$. La propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété \mathcal{P}_n est vraie.

La relation (†) appliquée à $x = \frac{a}{2^n}$ donne :

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 2f^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) - 1$$

On en déduit, comme la relation \mathcal{P}_n est supposée vraie :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2^n}\right) = 2f^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) - 1$$

La première formule démontrée dans la question 5 de la partie A, appliquée à $x=\frac{\beta}{2^{n+1}}$ donne :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2^n}\right) = 2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\beta}{2^{n+1}}\right) - 1$$

Ainsi:

$$f^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \operatorname{ch}^2\left(\frac{\beta}{2^{n+1}}\right)$$

Grâce à la question (2c) on sait que $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) > 1$, donc $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$ est positif.

D'après la partie A on sait que la fonction che st positive sur R.

On en déduit que la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie :

$$f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2^{n+1}}\right)$$

L'hérédité est démontrée.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}$$
 $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2^n}\right)$

(b) (2 points) Un entier $n \in \mathbb{N}$ étant fixé on définit la propriété :

$$\mathscr{P}_p: \qquad f\left(p\frac{a}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(p\frac{\beta}{2^n}\right)$$

On démontre par récurrence double que la propriété \mathcal{P}_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. Initialisation. Pour p = 0 la propriété s'écrit f(0) = 1. On sait que ch0 = 1 et f(0) = 1 d'après la question (1a), donc elle est vraie.

Pour p=1 la propriété s'écrit $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2^n}\right)$, elle est vraie d'après la question précédente.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $p \in \mathbb{N}$ les propriétés \mathscr{P}_p et \mathscr{P}_{p+1} sont vraies.

On applique alors la relation (\star) avec $x=(p+1)\frac{a}{2^n}$ et $y=\frac{a}{2^n}$. Elle donne :

$$f\left((p+2)\frac{a}{2^n}\right) + f\left(p\frac{a}{2^n}\right) = 2f\left((p+1)\frac{a}{2^n}\right)f\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

Comme la propriété \mathcal{P}_p est vraie aux rangs 1, p et p+1 alors :

$$f\left((p+2)\frac{a}{2^n}\right) + \operatorname{ch}\left(p\frac{\beta}{2^n}\right) = 2\operatorname{ch}\left((p+1)\frac{\beta}{2^n}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2^n}\right)$$

La seconde formule démontrée dans la question 5 de la partie A donne :

$$2\operatorname{ch}\left((p+1)\frac{\beta}{2^n}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left((p+2)\frac{\beta}{2^n}\right) + \operatorname{ch}\left(p\frac{\beta}{2^n}\right)$$

On en déduit :

$$f\left((p+2)\frac{a}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left((p+2)\frac{\beta}{2^n}\right)$$

Ceci montre que la propriété \mathcal{P}_{p+2} est vraie, et justifie donc l'hérédité de la récurrence double.

<u>Conclusion</u>. Par récurrence double la propriété \mathcal{P}_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, et comme cette démonstration est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$$
 $f\left(p\frac{a}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(p\frac{\beta}{2^n}\right)$

4. (a) (1 point) Comme $p_n = \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor$ alors par propriété de la partie entière :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{2^n x}{a} - 1 < p_n \leqslant \frac{2^n x}{a}$$

Comme 2^n est strictement positif alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}$$
 $\frac{x}{a} - \frac{1}{2^n} < \frac{p_n}{2^n} \leqslant \frac{x}{a}$

Comme $\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{x}{a}$ alors par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{2^n} = \frac{x}{a}$$

(b) (1 point) Soit x un réel positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $p_n = \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor$. Alors p_n est entier et donc d'après la question (3b):

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f\left(\frac{p_n}{2^n}a\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{p_n}{2^n}\beta\right)$$
 (1)

On a démontré dans la question précédente que $\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{2^n}=\frac{x}{a}$, on en déduit :

$$\frac{p_n}{2^n} a \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$
 et $\frac{p_n}{2^n} \beta \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{x\beta}{a}$

Les fonctions f et cosinus sont continues, donc :

$$f\left(\frac{p_n}{2^n}a\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$
 et $\operatorname{ch}\left(\frac{p_n}{2^n}\beta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{ch}\left(\frac{x\beta}{a}\right)$

Par unicité de la limite l'égalité (1) donne :

$$f(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x\beta}{a}\right)$$

On pose $\alpha = \frac{\beta}{a}$. Comme ch $\beta = f(a) > 1$ et ch 0 = 1 alors β est non-nul, donc $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

On vient de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x)$.

Si x est négatif, alors -x est positif, donc en appliquant ce qui précède :

$$f(-x) = \operatorname{ch}(-\alpha x)$$

La fonction f est paire d'après la question (1b) et la fonction che st paire également, donc $f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x)$: cette égalité est valable aussi pour x négatif.

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
 $f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x)$

5. (1 point) D'après la question précédente, si f est une solution du problème alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
 $f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x)$

Réciproquement, si f est la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha x)$ pour un certain réel non-nul α , alors elle est solution du problème. En effet :

- La fonction $f: x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha x)$ est définie sur \mathbb{R} , et continue par composition.
- Il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f(a) > 1. En effet, on sait que $\operatorname{ch} x > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc il suffit de poser a = 1, comme $\alpha \neq 0$ alors $f(a) = \operatorname{ch} \alpha > 1$.
- Le relation (*) s'écrit :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
 $\operatorname{ch}(\alpha x + \alpha y) + \operatorname{ch}(\alpha x - \alpha y) = 2\operatorname{ch}(\alpha x)\operatorname{ch}(\alpha y)$

Elle est conséquence directe de la seconde formule de la question 5, partie A. En conclusion les solutions du problème sont les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.