Lycée Bellevue – Toulouse **17 octobre 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°2

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées.

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème est indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice. Construction géométrique des solutions d'une équation *(12 points)*

Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On définit l'équation

$$z^2 - 2e^{i\theta}z - 1 = 0 \tag{E}$$

d'inconnue z complexe.

Cette équation a deux solutions éventuellement confondues z_1 et z_2.

On note M_1, M_2, P, A, B, C les points d'affixes respectives z_1, z_2, $e^{i\theta}$, 1, -1, i dans un repère orthonormé direct du plan. On suppose que les points P, A, B et C sont connus et déjà placés sur la figure. L'objectif est de placer les points M_1 et M_2 à partir de ces points.

1. (a) Donner le module et un argument du discriminant Δ de l'équation (E).
   (b) Calculer z_1 et z_2.
2. (a) Démontrer que $2\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{2\cos\theta}$ et $2\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{2\cos\theta}$ sont deux réels positifs.
   (b) En déduire les formes exponentielles de $z_1 + 1$ et $z_2 + 1$.
   (c) Vérifier que $z_1 + 1$, $z_2 + 1$, $e^{i\theta} + 1$ ont même argument modulo 2π.
   Que peut-on en déduire sur les points M_1, M_2, P et B ?
3. (a) Factoriser $z_1 - 1$ et $z_2 - 1$ par $e^{i\theta/2}$ et en déduire leurs modules.
   (b) En déduire que M_1, M_2 et C sont sur un même cercle, et préciser le centre et le rayon de celui-ci.
4. Expliquer comment à partir du point P on peut construire graphiquement les points M_1 et M_2 sans résoudre l'équation (E).
   Faire une figure dans le cas $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Problème.

La fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch, est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ch} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Partie A. *(10 points)*

1. Justifier que la fonction ch est paire et dérivable.
2. Calculer sa dérivée, décrire ses variations.
3. Donner un équivalent simple de $\mathrm{ch}\, x$ pour x au voisinage de $+\infty$.
   On attend une expression de la forme $\lambda\varphi(x)$ où λ est un constante réelle et φ une fonction classique.
4. Tracer sommairement l'allure de la courbe de la fonction ch.
5. Démontrer les formules :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R} & \mathrm{ch}(2x) = 2\,\mathrm{ch}^2 x - 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y) = 2\,\mathrm{ch}\, x\,\mathrm{ch}\, y \end{array}$$

6. Soit y un élément de l'intervalle $[1, +\infty[$.
   (a) Justifier par un argument théorique que y admet un unique antécédent positif par la fonction ch.
   (b) Calculer cet antécédent.

Partie B. *(13 points)*

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\begin{array}{ll} \exists a \in \mathbb{R}_+^* & f(a) > 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 & f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \end{array} \qquad (\star)$$

Pour les questions 1 à 4 on suppose que f est une solution du problème.

1. (a) Démontrer que $f(0) = 1$.
   (b) Démontrer que f est paire.
2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer une relation simple entre $f(x)$ et $\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
   (b) Démontrer par l'absurde que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant -1$.
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f\left(\frac{a}{2^n}\right) > 1$

Comme $f(a) \in]1, +\infty[$, alors d'après la partie précédente $f(a)$ admet un unique antécédent positif par la fonction ch. On note β cet antécédent.

3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \mathrm{ch}\left(\frac{\beta}{2^n}\right)$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence double que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad f\left(p\frac{a}{2^n}\right) = \mathrm{ch}\left(p\frac{\beta}{2^n}\right)$
   On utilisera la relation $(\star)$.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $p_n = \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor$. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{2^n}$
   (b) Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$
5. Conclure : quel est l'ensemble des solutions du problème ?