Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2025-2026**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 5
du 13 au 17 octobre 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Soit (u_n) une suite récurrente d'itérative f. Si f est croissante alors (u_n) est monotone.
2. Avec les mêmes notations : Si (u_n) converge vers ℓ et f est continue alors $f(\ell) = \ell$.
3. Si (v_n) est négligeable devant (u_n) alors $(u_n + v_n)$ est équivalente à (u_n).
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, a^n est négligeable devant $n!$.
5. $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$

Exercices

Chapitre B1. Les nombres complexes

I. Généralités
II. Angles
III. Équations algébriques
IV. L'exponentielle complexe

Chapitre B2. Logique

I. Logique
II. Modes de raisonnement

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B2 (Logique) et A4 (Calculs de limites).

Chapitre B1. Les nombres complexes

I. Généralités

Parties réelle et imaginaire, opérations sur les nombres complexes, représentation dans le plan, affixe et image, droite des réels, des imaginaires purs.

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Formules $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$. Caractérisation des réels et des imaginaires purs ($\bar{z} = z$ et $\bar{z} = -z$).

Module, compatibilité avec la multiplication. Inégalités triangulaires. Lemme pour la démonstration : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$ et $-|z| \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$, $-|z| \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant |z|$.

Le module de $a-b$ est la distance de A à B. Définitions : cercle, disque ouvert et fermé dans le plan complexe.

II. Angles

Ensemble $\mathbb{U}$, définition : $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Formules d'Euler.

Argument : définition, non-unicité, propriétés ($\arg(zz') = ...$). Aspect géométrique de la multiplication de deux complexes. Formes algébriques et exponentielles d'un complexe. Description géométrique des applications $z \mapsto z+b$, $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto e^{i\theta}z$ et $z \mapsto \bar{z}$.

Applications à la trigonométrie : formules de somme, de duplication, de transformation de somme en produit, formules en $t = \tan(x/2)$. Formule de Moivre, calcul des cosinus, sinus de nx où n est un entier naturel. Linéarisation d'une expression trigonométrique, petits calculs d'intégrales. Simplification de $1+e^{it}$, $e^{ip}+e^{iq}$ en factorisant par l'exponentielle de l'angle moyen. Simplification de $a\cos x + b \sin x$ (transformation de Fresnel).

Applications à la géométrie : conditions nécessaires et suffisantes sur les affixes pour que trois points soient alignés, deux vecteurs soient parallèles ou orthogonaux.

III. Equations algébriques.

Tout complexe non-nul admet exactement deux racines carrées. Equations du second degré à coefficients complexes. Somme et produit des racines.

Racines de l'unité, notation $\mathbb{U}_n$, exemples. Somme (0) et produit ($(-1)^{n-1}$).

Racines n-èmes d'un complexe quelconque.

IV. L'exponentielle complexe

Définition : $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Propriétés, l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective, non injective (première introduction de ces notions, sans donner les définitions).

Chapitre B2. Logique

I. Logique

Proposition P, négation $\neg P$, conjonction P et Q, disjonction P ou Q, implication $P \Rightarrow Q$, équivalence $P \Leftrightarrow Q$. Lois de de Morgan ($\neg(P$ et $Q)$, etc), réciproque, contraposée. Exemples simples de tables de vérité.

Quantificateurs : $\forall$ et $\exists$. Négations.

II. Modes de raisonnement

Démonstrations d'une implication, d'une équivalence. Raisonnement direct, par contraposée, par l'absurde. Raisonnement par récurrence, récurrence double, forte, finie. Raisonnement par analyse-synthèse.