Chapitre B4
Ensembles

I. Ensembles

A. Appartenance et inclusion

Définition

Soit E un ensemble.

Si x est élément de E alors on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Si x n'appartient pas à E alors on note $x \notin E$.

Définition

L'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément : $\varnothing = \{\}$

Définitions

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- On dit que A est *inclus* dans B et on note $A \subseteq B$ ou $A \subset B$ si tout élément de A est élément de B :
$$\forall a \in E \qquad a \in A \implies a \in B$$
- On note $A = B$ si $A \subset B$ et $B \subset A$:
$$\forall a \in E \qquad a \in A \iff a \in B$$

Remarques.

- On démontre souvent l'égalité de deux ensembles par double inclusion.
- L'assertion $A \not\subseteq B$ (A n'est pas inclus dans B) s'écrit :
$$\exists a \in A \qquad a \notin B$$
- Une inclusion $A \subseteq B$ est dite *stricte* si les deux ensembles sont différents. On note alors $A \subsetneq B$.

Exemple. Les ensembles de nombres habituels vérifient les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Définition

Soit E un ensemble. Si A est un ensemble inclus dans E alors on dit que A est un *sous-ensemble* de E, ou une *partie* de E.

Notation

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Exemple. Si $E = \{a, b\}$, alors

$\mathscr{P}(E) =$

▷ **Exercice 1.**

B. Opérations sur les parties d'un ensemble

Définitions

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :

$\overline{A} = E \setminus A = \complement_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\}$	le *complémentaire* de A (dans E)
$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$	l'*intersection* de A et B
$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$	l'*union* ou la *réunion* de A et B
$A \setminus B = A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$	la *différence* de A et B.

Proposition - Règles de calcul sur les parties d'une ensemble

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

Proposition (Lois de De Morgan)

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :

$\overline{A \cap B} =$ $\overline{A \cup B} =$

Proposition (Distributivités)

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Alors :

$A \cap (B \cup C) =$ $A \cup (B \cap C) =$

Démonstration.

Résumé

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :

$$\forall x \in E \quad (x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B)$$

$$\forall x \in E \quad (x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B)$$

$$\forall x \in E \quad (x \in \overline{A} \iff x \notin A)$$

$$A \subseteq B \iff (\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A = B \iff (\forall x \in E \quad x \in A \iff x \in B)$$

▷ **Exercices 2, 3.**

C. Produit cartésien

Définitions

Soit E et F deux ensembles. On appelle *produit cartésien* de E et de F l'ensemble :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Un élément (x, y) de $E \times F$ est appelé *couple*.

Définitions

Soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles. On appelle *produit cartésien* de ces ensembles l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i = 1 \dots n \quad x_i \in E_i\}$$

On appelle *n-uplets* ses éléments.

Si tous les E_i sont égaux alors on note $E^n = E \times \cdots \times E$.

Exemples.

- On connaît déjà les produits cartésiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
- Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$. Alors :

$E \times F =$

▷ **Exercice 4.**

II. Applications

A. Généralités

Définition

Soit E et F deux ensembles non-vides. Une *application* de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F.

On note :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Notation

On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définitions

Soit f une application de E dans F.

- Si A est une partie de E alors on appelle *image* de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble :
$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A\}$$
Il s'agit d'un sous-ensemble de F : $f(A) \subseteq F$.
- Si B est une partie de F alors on appelle *image réciproque* de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$
Il s'agit d'une partie de E : $f^{-1}(B) \subseteq E$.

Remarque. Ainsi la donnée de $f : E \to F$ permet de définir deux nouvelles fonctions :

$$f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F) \qquad \text{et} \qquad f^{-1} : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E).$$

La première ne doit pas être confondue avec la fonction f de départ, même si par abus elle est notée de la même façon.

La seconde est définie même si f n'est pas bijective, et dans le cas où f est bijective il ne faut pas la confondre avec la réciproque de f.

Exemple. Pour la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

$f(]-1,3[) =$ $\qquad$ $f^{-1}([1,4]) =$

$f(\mathbb{R}) =$ $\qquad$ $f^{-1}(\{-2\}) =$

Méthode

Soit $x \in E$ et $y \in F$. Alors :

$y \in f(A) \iff$

$x \in f^{-1}(B) \iff$

▶ **Exercice 5.**

B. Injections, surjections, bijections

1. Injection

Définition

Une fonction $f : E \to F$ est une *injection*, ou est *injective*, si :

Proposition

Une fonction $f : E \to F$ est injective si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent.

Démonstration. Par négation f n'est pas injective si et seulement si

$$\exists (x, x') \in E^2 \qquad f(x) = f(x') \quad \text{et} \quad x \neq x'$$

Ceci signifie qu'au moins un $y \in F$ possède au moins deux antécédents.

Donc f est injective si et seulement si tout y de F possède au plus un antécédent. □

Exemples.

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont injectives.
- Id_E est injective.
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective $\qquad$ $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est injective.
- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.

Proposition

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

Démonstration.

▶ **Exercice 6.**

2. Surjection

Définition

Une fonction $f : E \to F$ est une *surjection*, ou est *surjective*, si tout élément de F possède (au moins) un antécédent :

Exemples.

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective, $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est surjective.
- Id_E est surjective.
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective $\qquad$ $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est surjective.
- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Remarque. Une application peut être à la fois injective et surjective, ou ni injective ni surjective, etc.

Proposition

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration.

▶ **Exercice 7.**

3. Bijection

Définition

Une fonction $f : E \to F$ est une *bijection*, ou est *bijective*, si elle est injective et surjective.

De façon équivalente, f est bijective si tout élément de F possède un et un seul antécédent par f :

Exemples.

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective (alors que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ l'est).
  $\ln \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective.
- Id_E est bijective.
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective $\qquad$ $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

Proposition

La composée de deux bijections est une bijection.

Démonstration. Cette propriété est conséquence des deux propriétés ci-dessus. □

Définition

Soit $f : E \to F$ une bijection. On appelle *fonction réciproque* de f et on note f^{-1} la fonction de F dans E qui à tout $y \in F$ associe son antécédent par f.

Remarque. Ainsi :

- $\forall x \in E \quad \forall y \in F \qquad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
- $f^{-1} \circ f =$ et • $f \circ f^{-1} =$

Exemples.

- La réciproque de la fonction ln est la fonction exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.
- La réciproque de Id_E est Id_E.
- La réciproque de $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est la fonction racine carrée $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Théorème

Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors f est bijective si et seulement si il existe une fonction $g : F \to E$ telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

Dans ce cas g est la réciproque de f : $g = f^{-1}$.

Démonstration.

T.S.V.P.

Remarque.

Si f est bijective alors f^{-1} est bijective, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple 1. *(i)* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 5 - 3x$ *(ii)* $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$

Méthode : Démontrer qu'une fonction est bijective

Trois possibilités pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective et obtenir sa réciproque :

1. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x, où $y \in F$ est fixé.

   Si cette équation admet une et une seule solution pour tout $y \in F$ alors f est bijective.

   De plus cette solution est l'antécédent de y par f, donc $f^{-1}(y)$.

   On a donc une expression de f^{-1}.
2. On exhibe une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors par théorème f est bijective et $g = f^{-1}$.
3. Si E est un intervalle de $\mathbb{R}$ et F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ alors on peut appliquer le théorème de la bijection, voir ci-dessous.

Proposition (Suite de la précédente)

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections alors $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est :

Démonstration.

Exemple 2.

(i) Soit α un réel non-nul. Alors la fonction $x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, de réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.

(ii) Soit n un entier positif impair. Alors la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Sa réciproque est la racine n-ème $x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, définie sur $\mathbb{R}$.

▶ **Exercice 8.**

C. Cas des fonctions réelles

Dans cette partie on suppose que E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

Remarques.

- Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors l'image de E est :

$$f(E) = \{ f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad f(x) = y\}$$

On peut restreindre l'ensemble d'arrivée de f en définissant une nouvelle fonction

$$\begin{aligned} \hat{f} : E &\longrightarrow f(E) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

que l'on note souvent f par abus.

Cette fonction est surjective. On dit que f *induit* ou *réalise* une surjection $E \to f(E)$.

- Si f est strictement monotone alors f est injective, et donc f réalise une bijection de E dans $f(E)$.

  De plus la bijection réciproque est strictement monotone de même sens que f.

  Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice des axes.



Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. On note $J = f(I)$.

Soit y et y' sont deux éléments de J. Alors il existe x et x' dans I tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

Soit d compris entre y et y'. Comme I est un intervalle et f est continue alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in I$ tel que $d = f(c)$. Ceci montre que $d \in f(I)$, *i.e.*, $d \in J$.

Tous les réels compris entre y et y' sont dans J, ceci pour tout couple (y, y') d'éléments de J, donc J est un intervalle. □

Remarque. L'intervalle J est déterminé grâce aux limites de f aux bornes de I. Par exemple :

- Si $I = [a, b]$ et f est croissante alors $J =$
- Si $I = [a, b]$ et f est décroissante alors $J =$
- Si $I = [a, b[$ et f est croissante alors $J =$
- etc.

Théorème - Continuité de la réciproque

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction bijective.
Si f est continue alors sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue.

Exemple. La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective.

Sa réciproque est (par définition) la fonction exp, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Comme ln est strictement croissante et continue alors exp est strictement croissante et continue.

Théorème - Dérivabilité de la réciproque

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective.
Si f est dérivable alors sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur

$$J' = \left\{ y \in J \mid f' \circ f^{-1}(y) \neq 0 \right\}.$$

Sa dérivée est :

Méthode pour retrouver la formule

On sait que pour tout $x \in J$: $f \circ f^{-1}(x) = x$. Par dérivation :

Remarque. Si la dérivée s'annule en x_0 alors la fonction réciproque n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$.

Exemple 3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$

▷ **Exercice 9.**

III. Relations binaires

A. Définition

Définition

Une *relation binaire* $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est une partie de $E \times E$. Au lieu de noter $(x, y) \in \mathscr{R}$ on note $x\mathscr{R}y$.

En d'autres termes, deux éléments de E peuvent être reliés ou non.

On peut aussi définir une relation binaire comme une application :

$$\mathscr{R} : E \times E \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

On note $x\mathscr{R}y$ si $\mathscr{R}(x, y)$ est vrai.

Exemples.

- Les relations $=$ $<$ $>$ $\leqslant$ $\geqslant$ sont des relations binaires sur $\mathbb{R}$.
- Les relations $=$ $\subset$ sont des relations binaires sur $\mathscr{P}(E)$.
- Les relations $|$ (divise) et $\equiv$ modulo 5 sont des relations binaires sur $\mathbb{Z}$.

B. Relation d'équivalence

Définition

Une *relation d'équivalence* sur un ensemble est une relation binaire

- *réflexive* :
- *symétrique* :
- *transitive* :

Exemple 4.

- La relation d'égalité sur les réels est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
- La relation de congruence modulo 5 est définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \qquad m \equiv n \quad [5] \qquad \iff \qquad 5 \mid (m - n)$$

  C'est une relation d'équivalence.
- On définit de même la relation de congruence modulo un réel sur $\mathbb{R}$.
- La relation "être équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.

Définition

Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E, et x est un élément de E, on appelle *classe d'équivalence* de x l'ensemble de tous les éléments y de E tels que $x\mathscr{R}y$.

Exemples.

- Pour la relation d'égalité sur les réels, les classes d'équivalence sont les singletons $\{x\}$ pour x parcourant $\mathbb{R}$.
- Pour la relation de congruence modulo 5 les classes d'équivalence sont au nombre de 5, on peut les noter $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.
- Soit E l'ensemble des élèves du lycée. La relation «est dans la même classe que» est une relation d'équivalence.

  Les classes d'équivalence sont
- Soit E l'ensemble des stylos et crayons d'une trousse. Alors la relation «écrit de la même couleur que» est une relation d'équivalence.

  Les classes d'équivalence sont
- Soit $\mathscr{E}$ la classe de tous les ensembles finis. Alors la relation «avoir le même nombre d'éléments que» est une relation d'équivalence sur $\mathscr{E}$.

  Les classes d'équivalence sont

Proposition

L'ensemble des classes d'équivalence de E forme une *partition* de E.

Définition

Soit E un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

On dit que cette famille est une *partition* de E si :

- Les A_i sont disjoints : $\forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$
- Les A_i couvrent E tout entier : $\bigcup_{i\in I} A_i = E$

Remarque. Dans ce cas tout élément a de A appartient à un unique A_i :

$$\forall a \in E \qquad \exists! i \in I \quad a \in A_i$$

▶ **Exercice 10.**

C. Relation d'ordre

Définition

Une *relation d'ordre* sur un ensemble est une relation binaire

- *réflexive* :
- *antisymétrique* :
- *transitive* :

Exemple 5.

- La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
- Soit E un ensemble. La relation d'inclusion $\subseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
- La relation de divisibilité $\mid$ sur $\mathbb{N}$:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \qquad a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad b = ka$$

est une relation d'ordre.

Définitions

Une relation d'ordre est dite *totale* si deux éléments peuvent toujours être comparés :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad x \mathscr{R} y \quad \text{ou} \quad y \mathscr{R} x$$

Sinon elle est dite *partielle*.

Exemple 5 (suite). Parmi les trois relations d'ordre données ci-dessus, celles qui sont totales sont :

Définitions

Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur un ensemble E.

Soit A une partie de E et m un élément de E. On dit que :

- m est un *majorant* de A pour la relation $\preccurlyeq$ si : $\forall a \in A \quad a \preccurlyeq m$
  Si de plus m appartient à A alors m est le *maximum* de A pour la relation $\preccurlyeq$.
  On dit aussi que m est le *plus grand élément* de A pour la relation $\preccurlyeq$.
- On définit de même un minorant et le minimum ou plus petit élément.

Remarques.

- Si une partie est majorée alors elle n'admet pas forcément de maximum.
- Si une partie admet un maximum alors il est unique, par antisymétrie.

Exemples. Soit E un ensemble.

- Alors $\mathscr{P}(E)$ possède un minimum et un maximum pour la relation $\subseteq$.
  Le minimum est et le maximum est
- Soit A et B deux parties de E. Alors le couple $\{A, B\}$ est une partie de $\mathscr{P}(E)$.
  Cette partie admet pour majorant
  et pour minorant

Exemple. L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni de la relation d'ordre de divisibilité.
Alors $\mathbb{N}$ admet un minimum et un maximum pour cette relation.
Le minimum est et le maximum est

IV. Ensembles finis

A. Cardinal

Définition

Soit E un ensemble fini. Le *cardinal* de E est son nombre d'éléments, noté :

Propositions

Soit E un ensemble fini et F une partie de E. Alors :

- F est finie
- $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$
- $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E \iff F = E$.

Propositions

Soit E et F deux ensembles finis, et $f : E \to F$ une application.

- Si f est injective alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est surjective alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est bijective alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.
- Supposons que E et F sont de même cardinal. Alors :

  f injective $\iff$ f bijective $\iff$ f surjective

Remarque. Deux ensembles, finis ou non, sont dits de même cardinal s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

Propositions

Soit E un ensemble fini.

- Pour toute partie F de E :

$$\operatorname{Card} \overline{F} =$$

- Pour toutes parties F et G de E :

$$\operatorname{Card}(F \cup G) =$$

Corollaire

Si F et G sont deux parties finies **disjointes** d'un ensemble E alors :

$$\operatorname{Card}(F \cup G) =$$

Proposition

Si E et F sont deux ensembles finis alors :

$$\operatorname{Card}(E \times F) =$$

Démonstration. Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_p\}$. Alors :

$$E \times F = \{(x_i, y_j) \mid i = 1 \dots n \quad j = 1 \dots p\}$$

Cet ensemble est de cardinal np. □

Corollaire

Soit E un ensemble fini, k un entier naturel. Alors :

$$\operatorname{Card}(E^k) =$$

Démonstration. En effet :

$$E^k = \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \mid \forall j = 1 \dots k \quad 1 \leqslant i_j \leqslant n\}$$

Cet ensemble est de cardinal n^k. □

Notation (rappel)

Soit E et F deux ensembles.
On note $\mathscr{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Proposition

Soit E et F sont deux ensembles finis. Alors :

$$\operatorname{Card}\mathscr{F}(E,F) =$$

On note pour cette raison : $F^E = \mathscr{F}(E,F)$.

Démonstration. Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. La donnée d'une application φ de E dans F est la donnée, pour tout $i = 1 \dots n$, d'un élément de F. En d'autres termes, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \end{array}$$

est une bijection. Sa réciproque est l'application :

$$\begin{array}{rcl} F^n & \longrightarrow & \mathscr{F}(E,F) \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & (\varphi : x_i \mapsto u_i) \end{array}$$

Le cardinal est $\mathscr{F}(E,F)$ est donc égal à celui de F^n :

$$\operatorname{Card}\mathscr{F}(E,F) = \operatorname{Card}(F^n) = (\operatorname{Card} F)^n = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}$$ □

Proposition

Si E est un ensemble fini à n éléments alors :

$$\operatorname{Card}\mathscr{P}(E) =$$

Démonstration. Pour tout partie F de E on appelle *fonction caractéristique de* F la fonction $\chi_F : E \to \{0,1\}$ qui à tout x de E associe 1 si $x \in F$ et 0 sinon.
Les applications

$$\chi : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E,\{0,1\}) \\ F & \longmapsto & \chi_F \end{array} \qquad \text{et} \qquad \Psi : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(E,\{0,1\}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^{-1}(\{1\}) \end{array}$$

sont donc bijectives réciproques l'une de l'autre. Ceci montre que :

$$\operatorname{Card}\mathscr{P}(E) = \operatorname{Card}\mathscr{F}(E,\{0,1\}) = 2^{\operatorname{Card} E}$$

Il s'agit bien du résultat attendu. □

B. Listes

Cadre

Dans toute la suite on note E un ensemble à n éléments et k un entier naturel.

Définition

Une *k-liste* est une liste de k éléments, c'est-à-dire un k-uplet.

Remarque. L'ensemble des k-listes d'éléments de E est E^k, et le nombre de k-listes d'éléments de E est n^k.

Proposition

Supposons que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de k-listes d'éléments **distincts** de E est :

Démonstration. Si $(x_1, \dots, x_k)$ est une k-liste d'éléments distincts de E, alors x_1 est un des n éléments de E, puis x_2 est un des $n-1$ éléments de $E - \{x_1\}$, etc. □

Exemple 6. Soit F un ensemble à k éléments. Le nombre d'applications de F dans E est :

Le nombre d'applications injectives de F dans E est :

Le nombre d'applications bijectives de F dans E est :

Définition

Une *permutation* de E est une n-liste d'éléments distincts de E, c'est-à-dire une liste de tous les éléments de E.

Proposition

Le nombre de permutations de E est $n!$. C'est le nombre de façons d'ordonner E.

▶ **Exercice 11.**

C. Combinaisons

Proposition

Le nombre de parties à k éléments de E (ou de k-combinaisons) est :

C'est également le nombre de façons de choisir k éléments parmi n.

Notation

On note dorénavant $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E.
Cet ensemble est donc de cardinal $\binom{n}{k}$.

Démonstration. Soit $\mathscr{L}_k(E)$ l'ensemble des k-listes d'éléments distincts de E.

Soit F une partie de E à k éléments. Alors il existe $k!$ permutations de F. L'ensemble de ces permutations est $\mathscr{L}_k(F)$.

Toute k-liste d'éléments distincts de E est obtenue de cette façon donc :

$$\mathscr{L}_k(E) = \bigcup_{F \in \mathscr{P}_k(E)} \mathscr{L}_k(F)$$

Si deux parties F et F' sont différentes, alors $\mathscr{L}_k(F)$ et $\mathscr{L}_k(F')$ sont disjointes, donc :

$$\operatorname{Card} \mathscr{L}_k(E) = \sum_{F \in \mathscr{P}_k(E)} \operatorname{Card} \mathscr{L}_k(F)$$

Ceci donne

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \times \operatorname{Card}\left(\mathscr{P}_k(E)\right)$$

On obtient la formule annoncée. □

Proposition - Formule du binôme

Soit a et b deux complexes. Alors :

Démonstration. On écrit :

$$(a+b)^n = (a+b)\cdots(a+b)$$

Chaque monôme du développement de ce produit contient n facteurs a ou b, donc est de la forme $a^k b^{n-k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Le nombre de monômes $a^k b^{n-k}$ est le nombre de façons de choisir k facteurs a parmi les n facteurs a possibles, donc $\binom{n}{k}$. □

Propositions

(i) Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \leqslant n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(iii) Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}$ tels que $0 < k < n$: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Démonstration.

(i) L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ F & \longmapsto & \overline{F} \end{array}$ est une bijection (et même une involution).

Si un sous-ensemble contient k éléments alors son complémentaire en contient $n-k$, *i.e.,* l'image de $\mathscr{P}_k(E)$ par cette application est $\mathscr{P}_{n-k}(E)$, donc :

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}_k(E) = \operatorname{Card} \mathscr{P}_{n-k}(E)$$

Ceci donne la formule.

(ii) L'union

$$\mathscr{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$$

est disjointe, donc :

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card} \mathscr{P}_k(E)$$

Ceci donne la formule annoncée.

(iii)