Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2025-2026**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 4
du 6 au 10 octobre 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Tout complexe non-nul possède exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$.
2. Théorème de résolution des équations du second degré à coefficients complexes.
3. Racines n-èmes de l'unité. Définition et propriété : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \;\middle|\; k = 0 \dots n-1 \right\}$.
4. Somme et produit des racines n-èmes de l'unité.
5. Une implication et sa contraposée sont équivalentes (deux démonstrations à connaître).

Exercices

Chapitre A3. Fonctions d'une variable réelle

I. Généralités sur les fonctions
II. Dérivation
III. Continuité
IV. Fonctions classiques

Chapitre B1. Les nombres complexes

I. Généralités	
II. Angles	Sauf la géométrie
III. Équations algébriques	Juste les équations du second degré
IV. *L'exponentielle complexe*	*Hors programme*

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B1 (Complexes) et B2 (Logique).

Chapitre A3. **Fonctions d'une variable réelle**

I. Généralités sur les fonctions

Compléments sur les réels : intervalles. Majorants, minorant d'une partie. Maximum, minimum d'une partie. Pas de bornes supérieures et inférieures pour l'instant.

Image d'une fonction. Addition, produit, quotient, composition de fonctions.

Exemples de graphes de fonctions du type $x \mapsto f(x) + a$, $f(x+a)$, $f(ax)$, $af(x)$. Parité, périodicité. Extrema, croissance.

Plan d'étude d'une fonction : ensemble de définition, réduction grâce à la parité et la périodicité, dérivation avec étude aux points où la dérivabilité n'est pas acquise, tableau de variations, limites (simples pour l'instant), tracé.

II. Dérivation

Définition de la dérivée. Tangentes. Liens entre la croissance de f et le signe de f' (sans démonstration). Dérivées usuelles, opérations, dont la composition. Dérivées n-èmes (sans la formule de Leibniz). Convexité : juste le cas des fonctions dérivables.

III. Continuité

Définition, lien avec la dérivabilité. Théorème des valeurs intermédiaires. Définition de la bijection et théorème de la bijection.

IV. Fonctions classiques

Fonctions polynomiales. Fonctions sinus, cosinus, tangente. Fonctions logarithme (népérien, brièvement décimal et binaire), fonction exponentielle, fonctions puissance. Croissances comparées.

Chapitre B1. **Les nombres complexes**

I. Généralités

Parties réelle et imaginaire, opérations sur les nombres complexes, représentation dans le plan, affixe et image, droite des réels, des imaginaires purs.

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Formules $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Caractérisation des réels et des imaginaires purs ($\bar{z} = z$ et $\bar{z} = -z$).

Module, compatibilité avec la multiplication. Inégalités triangulaires. Lemme pour la démonstration : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$ et $-|z| \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$, $-|z| \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant |z|$.

Le module de $a - b$ est la distance de A à B. Définitions : cercle, disque ouvert et fermé dans le plan complexe.

II. Angles

Ensemble $\mathbb{U}$, définition : $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Formules d'Euler.

Argument : définition, non-unicité, propriétés ($\arg(zz') = ...$). Aspect géométrique de la multiplication de deux complexes. Formes algébriques et exponentielles d'un complexe. Description géométrique des applications $z \mapsto z + b$, $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto e^{i\theta} z$ et $z \mapsto \bar{z}$.

Applications à la trigonométrie : formules de somme, de duplication, de transformation de somme en produit, formules en $t = \tan(x/2)$. Formule de Moivre, calcul des cosinus, sinus de nx où n est un entier naturel. Linéarisation d'une expression trigonométrique, petits calculs d'intégrales. Simplification de $1 + e^{it}$, $e^{ip} + e^{iq}$ en factorisant par l'exponentielle de l'angle moyen. Simplification de $a \cos x + b \sin x$ (transformation de Fresnel).

Applications à la géométrie : conditions nécessaires et suffisantes sur les affixes pour que trois points soient alignés, deux vecteurs soient parallèles ou orthogonaux.

III. Equations algébriques.

Tout complexe non-nul admet exactement deux racines carrées. Equations du second degré à coefficients complexes. Somme et produit des racines.

Racines de l'unité, notation $\mathbb{U}_n$, exemples. Somme (0) et produit ($(-1)^{n-1}$).

Racines n-èmes d'un complexe quelconque.

IV. L'exponentielle complexe

Définition : $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Propriétés, l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective, non injective (première introduction de ces notions, sans donner les définitions).