

Devoir à la Maison n°2

Problème 1.

On pose : $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

1. Rappeler les justifications des propriétés suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \geq 1 + t$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de f , ses variations et ses limites.

3. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Justifier que g est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$.

On note encore g le prolongement obtenu.

(b) Étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement.

4. (a) Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$.

(b) Déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

5. Représenter l'allure de la courbe de f ainsi que ses asymptotes.

Problème 2.

1. Soit ω une racine 5^{ème} de l'unité différente de 1.

(a) Calculer $\sum_{k=0}^4 \omega^k$.

(b) Soit $z_1 = \omega + \omega^4$ et $z_2 = \omega^2 + \omega^3$.

Démontrer que z_1 et z_2 satisfont l'équation : $z^2 + z - 1 = 0$.

(c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$, puis celle de $\cos \frac{\pi}{5}$.

2. (a) Résoudre l'équation $z^5 = i$.

Donner chaque solution sous la forme $re^{i\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.

On note $z_1, \dots, z_5$ ces solutions, rangées dans l'ordre croissant des arguments, et on note $A_1, \dots, A_5$ les points images de $z_1, \dots, z_5$.

(b) Tracer en bleu le polygône $A_1A_2A_3A_4A_5$ et en rouge le polygône $A_1A_3A_5A_2A_4$.

(c) Calculer le quotient $\frac{A_1A_3}{A_1A_2}$