Corrigé du Devoir Surveillé n°1

Exercices. (10 points)

1. (a) (2 points) Soit \mathfrak{D}_a l'ensemble de définition de l'équation $\sqrt{x^2 - 7} = |2x - 5|$. Cette équation est définie si et seulement si $x^2 \geqslant 7$, donc :

$$\mathfrak{D}_a = \left] -\infty, -\sqrt{7} \right[\cup \left] \sqrt{7}, +\infty \right[$$

Tous les termes sont positifs dont on peut raisonner par équivalences :

$$\sqrt{x^2 - 7} = |2x - 5| \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 7 = (2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$\iff \qquad 3x^2 - 20x + 32 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 4^2(5^2 - 3 \times 8) = 4^2$, ses racines sont $x_1 = 4$ et $x_2 = \frac{8}{3}$.

On vérifie que ces racines sont dans l'ensemble de définition : $x_1^2 = 16 \geqslant 7$ et $x_2^2 = \frac{64}{9} \geqslant \frac{63}{9} = 7$.

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est donc :

$$\mathcal{S}_a = \left\{ \frac{8}{3}, 4 \right\}$$

(b) (2 points) Soit \mathfrak{D}_b l'ensemble de définition de l'équation $3 \tan x = 2 \cos x$, c'est-à-dire celui de la tangente :

$$\mathfrak{D}_b = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si $x \in \mathcal{D}_b$ alors $\cos x$ est non-nul donc par équivalences :

$$3 \tan x = 2 \cos x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 \sin x = 2 \cos^2 x = 2 - 2 \sin^2 x$$

$$\iff \qquad 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

Les racines de l'équation du second degré $2X^2+3X-2=0$ sont $X_1=\frac{1}{2}$ et $X_2=2$, donc :

$$3\tan x = 2\cos x$$
 \iff $\sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = -2$

Un sinus est dans l'intervalle [-1,1] donc il ne peut valoir -2, et ainsi l'équation équivaut à $\sin x = \frac{1}{2}$, donc son ensemble de solutions est :

$$\mathcal{S}_b = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. (2 points) Par définition:

$$A = \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{1 \le i \le j \le 10} i^2$$

Par propriété des sommes triangulaires :

$$A = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{10} i^2$$

On en déduit par linéarité :

$$A = \sum_{i=1}^{10} (11 - i)i^2 = 11 \sum_{i=1}^{10} i^2 - \sum_{i=1}^{10} i^3$$

Grâce aux formules pour les sommes des premiers carrés et des premiers cubes :

$$A = 11 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10^2 \times 11^2}{4} = 11^2 \times 10 \times \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right) = 11^2 \times 10$$

Finalement:

$$A = 1210$$

3. (4 points) L'écriture matricielle du système S est :

$$S: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ puis $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$ donnent :

$$S \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ \lambda^2 - 3 \end{pmatrix}$$

On effectue ensuite les opérations :

$$(L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2): \qquad S \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \lambda^2 - 3 \end{pmatrix}$$

$$(L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda - 1)L_2): S \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 3) \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \lambda^2 - 3\lambda \end{pmatrix}$$

Pour le terme en bas de la troisième colonne on a écrit :

$$(\lambda^2 - 1) - 4(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

De même on factorise : $\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3)$.

Enfin on applique l'opération $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$:

$$S \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 3) \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \lambda(\lambda - 3) \end{pmatrix}$$

Premier cas. Si $\lambda = 1$ alors :

$$S \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La dernière ligne montre que ce système est incompatible, donc le système n'admet pas de solution.

Deuxième cas. Si $\lambda = 3$ alors :

$$S \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$S \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x & -3z = 0 \\ y + 4z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 3z \\ y = 3 - 4z \end{cases}$$

Les solutions sont donc les triplets (3z, 3-4z, z) où z est un élément de \mathbb{R} .

Troisième cas. Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 3$ alors $(\lambda - 1)(\lambda - 3)$ n'est pas nul, donc on peut appliquer l'opération $(L_3 \leftarrow \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda - 3)}L_3)$:

$$S \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\lambda}{\lambda - 1} \end{pmatrix}$$

Les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3)$ et $(L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3)$ donnent :

$$S \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{3\lambda}{\lambda - 1} \\ \frac{-\lambda - 3}{\lambda - 1} \\ \frac{\lambda}{\lambda - 1} \end{pmatrix}$$

Le système admet donc une unique solution : $(x,y,z)=\left(\frac{3\lambda}{\lambda-1},\frac{-\lambda-3}{\lambda-1},\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)$

Finalement, l'ensemble des solutions du système (S) est :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \lambda = 1 \\ \left\{ (3z, 3 - 4z, z) \mid z \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } \lambda = 3 \\ \left\{ \left(\frac{3\lambda}{\lambda - 1}, \frac{-\lambda - 3}{\lambda - 1}, \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) \right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Problème 1. Nombres de Catalan

(10 points)

1. (a) (1 point) La formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est valable pour tout couple d'entiers (n,k) tel que $0 \le k \le n$. Elle donne :

$$c_0 = 1$$
 $c_1 = 1$ $c_2 = 2$ $c_3 = 5$.

(b) (2 points) Si n = 0 alors $\binom{2n}{n} = 1$ et $\binom{2n}{n+1} = \binom{0}{1} = 0$, donc $c_0 = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$. Supposons maintenant que $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $0 \le n \le 2n$ donc on peut écrire :

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!(n+1)}{(n+1)!n!} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = c_n$$

Le résultat est démontré.

(c) $(1 \ point)$ Les coefficients du binôme sont des entiers, donc la formule précédente montre que les c_n sont des entiers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $0 \leq n \leq 2n$ alors $\binom{2n}{n}$ est strictement positif.

Or $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ donc c_n est strictement positif.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) (1 point) Soit i = n - k. Si k va de 0 à n alors i va de 0 à n également, donc :

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} (n-i)c_{n-i}c_i = \sum_{i=0}^{n} (nc_{n-i}c_i - ic_{n-i}c_i)$$

Par linéarité, et comme i est une variable muette :

$$T_n = n \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} c_k - \sum_{k=0}^{n} k c_{n-k} c_k = n S_n - T_n$$

Ceci montre que $T_n = \frac{n}{2}S_n$.

(b) (1 point) Soit $k \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{k+1}{k+2} \times \frac{(2k+2)!(k!)^2}{(2k)!((k+1)!)^2}$$
$$= \frac{k+1}{k+2} \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} = \frac{2(2k+1)}{k+2} = \frac{4k+2}{k+2}$$

Il s'agit du résultat attendu.

(c) (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité :

$$4T_n + 2S_n = 4\sum_{k=0}^n kc_k c_{n-k} + 2\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^n (4k+2)c_k c_{n-k}$$

La relation démontrée dans la question précédente s'écrit $(4k+2)c_k = (k+2)c_{k+1}$, donc :

$$4T_n + 2S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+2)c_{k+1}c_{n-k}$$

Le changement d'indice $\ell=k+1$ donne :

$$4T_n + 2S_n = \sum_{\ell=1}^{n+1} (\ell+1)c_{\ell}c_{n-\ell+1}$$

Comme ℓ est une variable muette :

$$4T_n + 2S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)c_k c_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)c_k c_{n+1-k} - c_0 c_{n+1}$$

Par linéarité et comme $c_0 = 1$:

$$4T_n + 2S_n = \sum_{k=0}^{n+1} kc_k c_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n+1-k} - c_{n+1} = T_{n+1} + S_{n+1} - c_{n+1}$$

Le résultat est démontré.

(d) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons \mathcal{P}_n la propriété : $c_{n+1} = S_n$.

Initialisation. On sait que
$$c_1 = 1$$
, et $S_0 = \sum_{k=0}^{0} c_k c_{0-k} = c_0^2 = 1$.

La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété \mathcal{P}_n est vraie.

La formule de la question précédente avec l'égalité $T_n = \frac{n}{2}S_n$ donne :

$$(2n+2)S_n = \frac{n+3}{2}S_{n+1} - c_{n+1}$$

La propriété \mathcal{P}_n est supposée vraie donc $S_n = c_{n+1}$, et ainsi :

$$(2n+2)c_{n+1} = \frac{n+3}{2}S_{n+1} - c_{n+1}$$

On en déduit :

$$S_{n+1} = \frac{2}{n+3} \times (2n+3)c_{n+1} = \frac{4n+6}{n+3}c_{n+1} \tag{1}$$

D'après la question (2b) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = \frac{4n+6}{n+3}$$

Ainsi l'égalité (1) donne :

$$S_{n+1} = c_{n+2}$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

Nous avons démontré que la propriété \mathcal{P}_n implique la propriété \mathcal{P}_{n+1} , donc la propriété est héréditaire.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 2. (10 points)

1. (a) (1 point) Les fonctions sinus et tangente sont dérivables donc par somme la fonction u est dérivable. On calcule :

$$\forall x \in I \qquad u'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{3} \left(2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) - 1 = \frac{2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x}{3\cos^2 x}$$

Ceci donne:

$$\forall x \in I \qquad u'(x) = \frac{1}{3\cos^2 x} \times P(\cos x) \qquad \text{avec} \quad P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$$

On peut effectivement écrire $P(X) = 2X^3 - 2X^2 - (X^2 - 1)$.

(b) (2 points) L'écriture de la question précédente donne :

$$P(X) = 2X^{2}(X-1) - (X-1)(X+1) = (X-1)(2X^{2} - X - 1)$$

Les racines du polynôme $2X^2 - X - 1$ sont $X_1 = 1$ et $X^2 = -\frac{1}{2}$, donc :

$$P(X) = 2(X - 1)^{2}(X + \frac{1}{2}).$$

On en déduit :

$$\forall x \in I \qquad u'(x) = 2 \frac{\left(\cos x - 1\right)^2 \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{3\cos^2 x}$$

Comme $x \in I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $0 \le \cos x \le 1$, donc $\cos x + \frac{1}{2} \ge 0$. Ceci montre que :

$$\forall x \in I \qquad u'(x) \geqslant 0$$

La fonction u est donc croissante sur l'intervalle I.

2. $(1 \ point)$ Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables donc par quotient et somme la fonction v est dérivable. On obtient :

$$\forall x \in I \qquad v'(x) = \frac{6\cos x + 3\cos^2 x + 3\sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} - 1 = \frac{-\cos^2 x + 2\cos x - 1}{(2 + \cos x)^2} = -\frac{(\cos x - 1)^2}{(2 + \cos x)^2}$$

Ceci montre que :

$$\forall x \in I \quad v'(x) \le 0$$

Ainsi la fonction v est décroissante sur l'intervalle I.

3. (1 point) La fonction u est croissante sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\forall x \in I$$
 $u(x) \geqslant u(0) = 0$

La fonction v est décroissante sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\forall x \in I \qquad v(x) \leqslant v(0) = 0$$

Ceci donne $g(x) - x \le 0 \le f(x) - x$ donc :

$$\forall x \in I \qquad g(x) \leqslant x \leqslant f(x)$$

4. (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque:

$$2\theta_{n+1} = 2\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{\pi}{3 \times 2^n} = \theta_n$$

Comme $b_n = \cos(\theta_n)$ alors $b_n = \cos(2\theta_{n+1})$ puis :

$$b_n = 2\cos^2\theta_{n+1} - 1 = 1 - 2\sin^2\theta_{n+1}$$
 donc $b_n = 2b_{n+1}^2 - 1 = 1 - 2a_{n+1}^2$

Ainsi:

$$a_{n+1}^2 = \frac{1 - b_n}{2}$$
 et $b_{n+1}^2 = \frac{1 + b_n}{2}$

Comme $n \ge 0$ et $\theta_{n+1} = \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$ alors $0 \le \theta_{n+1} \le \frac{\pi}{2}$, donc

$$cos(\theta_{n+1}) \geqslant 0$$
 et $sin(\theta_{n+1}) \geqslant 0$

Ainsi a_{n+1} et b_{n+1} sont positifs, et :

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}}$$

5. (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\theta_n = \frac{\pi}{3 \times 2^n}$ alors :

$$0 \leqslant \theta_n < \frac{\pi}{2}$$

Ceci montre que $\theta_n \in I$ et donc d'après la question (3) :

$$\forall n \in \mathbb{N}$$
 $g(\theta_n) \leqslant \theta_n \leqslant f(\theta_n)$

Ceci donne:

$$\frac{3\sin(\theta_n)}{2+\cos(\theta_n)} \leqslant \frac{\pi}{3\times 2^n} \leqslant \frac{1}{3}(2\sin(\theta_n) + \tan(\theta_n))$$

En multipliant par 3×2^n :

$$9 \times 2^n \left(\frac{a_n}{2 + b_n}\right) \leqslant \pi \leqslant 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

Il s'agit exactement du résultat attendu.

6. (2 points) Comme $\theta_n = \frac{\pi}{3 \times 2^n}$ alors: $\theta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc par composition de limites :

$$\frac{a_n}{\theta_n} = \frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

De même $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, donc $b_n = \cos(\theta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On sait que:

$$u_n = 9 \times 2^n \left(\frac{a_n}{2+b_n}\right)$$
 et $v_n = 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$

On peut alors écrire :

$$u_n = 9 \times 2^n \left(\frac{\frac{a_n}{\theta_n}}{2 + b_n}\right) \times \theta_n = 3\pi \times \frac{\frac{a_n}{\theta_n}}{2 + b_n}$$
et
$$v_n = 2^n \left(2\frac{a_n}{\theta_n} + \frac{\frac{a_n}{\theta_n}}{b_n}\right) \times \theta_n = \frac{\pi}{3} \times \left(2\frac{a_n}{\theta_n} + \frac{\frac{a_n}{\theta_n}}{b_n}\right)$$

Comme $\frac{a_n}{\theta_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ alors:

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$$
 et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$

On a bien démontré que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers π .