

Corrigé du Devoir Surveillé n°1

Exercices 1.

(8 points)

1. (2 points) Notons E_1 l'équation proposée :

$$(E_1) : \quad 2\sqrt{3} \sin x \tan x = 1$$

Cette équation est définie si et seulement si $\tan x$ est définie, donc si et seulement si x appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ alors par équivalence :

$$(E_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos x$$

La formule de base $\cos^2 + \sin^2 x = 1$ donne :

$$(E_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos^2 x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos x - 1 = 0$$

On obtient une équation du second degré en $X = \cos x$, dont le discriminant est $\Delta = \frac{49}{12}$ et les solutions sont $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$(E_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le cosinus d'un réel est toujours dans l'intervalle $[-1, 1]$, donc il ne peut être égal à $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. La seule possibilité est donc $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui s'écrit :

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$$

Ses solutions sont :

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. (2 points) Notons (E_2) l'équation :

$$(E_2) : \quad x + 5 = \sqrt{x + 11}$$

Cette équation est définie si et seulement si $x + 11 \geq 0$, donc sur l'ensemble $\mathcal{D}_3 = [-11, +\infty[$.

On raisonne par implication :

$$(E_2) \quad \implies \quad (x + 5)^2 = x + 11$$

Puis en développant :

$$(E_2) \quad \implies \quad x^2 + 9x + 14$$

Les discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 25$ puis ses racines sont $x_1 = -2$ et $x_2 = -7$.

Ceci montre que ces deux réels sont les seules solutions possibles de l'équation (E_2) .

On vérifie que -2 est bien solution : $3 = \sqrt{9}$.

Par contre -7 n'est pas solution : $-2 \neq \sqrt{4}$.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation ne contient que -2 :

$\mathcal{S}_2 = \{-2\}$

3. (2 points) On peut écrire :

$$S = 1 \times 100 + 2 \times 99 + \cdots + 100 \times 1 = \sum_{k=1}^{100} k(101 - k)$$

On utilise la linéarité de la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{100} (101k - k^2) = 101 \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{100} k^2$$

Les formules donnant la somme des premiers entiers et la somme des premiers carrés donnent :

$$\begin{aligned} S &= 101 \times \frac{100 \times 101}{2} - \frac{100 \times 101 \times 201}{6} \\ &= \frac{100 \times 101 \times (303 - 201)}{6} = \frac{100 \times 101 \times 102}{6} \end{aligned}$$

On calcule $\frac{102}{6} = 17$ et finalement :

$S = 100 \times 101 \times 17 = 171\,700$

4. (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{pk}\right) \geq \sqrt[p]{n+1}$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$ la propriété s'écrit $1 \geq 1$, car le produit vide est égal à 1.

Elle est donc valide.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{pk}\right) \geq \sqrt[p]{n}$$

Par multiplication par $\left(1 + \frac{1}{pn}\right)$, qui est positif, elle donne :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{pk}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{pk}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{pn}\right) \geq \sqrt[p]{n} \left(1 + \frac{1}{pn}\right)$$

On cherche donc à démontrer :

$$\sqrt[p]{n} \left(1 + \frac{1}{pn}\right) \geq \sqrt[p]{n+1} \quad (\star)$$

Par équivalence :

$$(\star) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{pn}\right)^p \geq \frac{n+1}{n}$$

On utilise la formule du binôme et on explicite les deux premiers termes :

$$\left(1 + \frac{1}{pn}\right)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left(\frac{1}{pn}\right)^k = 1 + \binom{p}{1} \frac{1}{pn} + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} \left(\frac{1}{pn}\right)^k.$$

On sait que $\binom{p}{1} = p$, et les termes $\binom{p}{k} \left(\frac{1}{pn}\right)^k$ sont tous positifs, donc :

$$\left(1 + \frac{1}{pn}\right)^p = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} \left(\frac{1}{pn}\right)^k \geq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

Ceci montre par équivalence que l'inégalité $(\star)$ est vraie, et celle-ci implique que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Nous avons démontré que la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1.

(7 points)

1. (a) (1 point) On sait que la fonction cosinus s'annule en tout angle de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où k est un entier, donc :

$$\begin{aligned} \cos 4x = 0 & \iff 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ & \iff x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} & (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- (b) (1 point) On cherche les solutions comprises dans l'intervalle $[0, \pi]$, donc qui vérifient :

$$0 \leq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \leq \pi$$

Cet encadrement équivaut à :

$$-\frac{\pi}{8} \leq k\frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{8} \quad \text{puis à} \quad -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{2}$$

Les entiers appartenant à l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$ sont 0, 1, 2, et 3, donc les solutions de l'équation comprises dans l'intervalle $[0, \pi]$ sont $\frac{\pi}{8} + k\pi$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, ce qui donne :

$$x_1 = \frac{\pi}{8} \quad x_2 = \frac{3\pi}{8} \quad x_3 = \frac{5\pi}{8} \quad x_4 = \frac{7\pi}{8}$$

2. (2 points) En posant $T = t^2$ l'équation (E_1) devient :

$$8T^2 - 6T + 1 = 0$$

Ses solutions sont $T_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $T_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Ainsi $t^2 = T_1$ ou $t^2 = T_2$. Il est évident que T_1 est positif, et comme $T_2 = \sqrt{9} - \sqrt{8}$ alors il est positif aussi. Il existe donc quatre solutions :

$$t_1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad t_2 = -\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad t_3 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \quad t_4 = -\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

On remarque que $(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, donc l'ensemble de solutions est :

$$\mathcal{S}_2 = \{\pm\sqrt{2} \pm 1\}$$

3. (1 point) La formule $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

De plus on sait que $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, ce qui donne $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$, et donc :

$$\cos 4x = \frac{8}{(1 + \tan^2 x)^2} - \frac{8}{1 + \tan^2 x} + 1$$

En multipliant par $(1 + \tan^2 x)^2$, qui est non nul, on obtient l'équivalence :

$$\begin{aligned} \cos 4x = 0 & \iff \frac{8}{(1 + \tan^2 x)^2} - \frac{8}{1 + \tan^2 x} + 1 = 0 \\ & \iff 8 - 8(1 + \tan^2 x) + (1 + \tan^2 x)^2 = 0 \\ & \iff \tan^4 x - 6 \tan^2 x + 1 = 0 \end{aligned}$$

L'équivalence demandée est démontrée.

4. (2 points) Si x prend l'une des valeurs $x_1, \dots, x_4$ alors x est solution de l'équation $\cos(4x) = 0$, donc d'après la question précédente $\tan x$ est solution de l'équation $t^4 - 6t^2 + 1 = 0$, et donc $\tan x$ prend l'une des valeurs de l'ensemble $\mathcal{S}_2 = \{\pm 1 \pm \sqrt{2}\}$.

On rappelle que :

$$x_1 = \frac{\pi}{8} \quad x_2 = \frac{3\pi}{8} \quad x_3 = \frac{5\pi}{8} \quad x_4 = \frac{7\pi}{8}$$

On remarque que :

$$0 < x_1 < \frac{\pi}{4} < x_2 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} < x_3 < \frac{3\pi}{4} < x_4 < \pi.$$

La fonction tangente est strictement croissante sur les intervalles $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2}, \pi]$, donc :

$$0 < \tan x_1 < 1 < \tan x_2 \quad \text{et} \quad \tan x_3 < -1 < \tan x_4 < 0.$$

Comme $0 < 1 < \sqrt{2} < 2$ alors :

$$-\sqrt{2} - 1 < -1 < -\sqrt{2} + 1 < 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 < \sqrt{2} + 1$$

On en déduit :

$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$	$\tan \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$
$\tan \frac{5\pi}{8} = -\sqrt{2} - 1$	$\tan \frac{7\pi}{8} = -\sqrt{2} + 1$

Problème 2. Coefficients du trinôme

(6 points)

1. (1 point) On obtient :

$$\begin{aligned} \binom{n}{0,0} &= \frac{n!}{0! \times 0! n!} = 1 & \binom{n}{0,1} &= \frac{n!}{0! \times 1! \times (n-1)!} = n \\ \binom{n}{1,0} &= \frac{n!}{1! \times 0! \times (n-1)!} = n & \binom{n}{1,1} &= \frac{n!}{1! \times 1! \times (n-2)!} = n(n-1) \end{aligned}$$

2. (1 point) On obtient d'une part :

$$\binom{n}{i+j} \binom{i+j}{i} = \frac{n!}{(i+j)!(n-i-j)!} \times \frac{(i+j)!}{i!j!} = \frac{n!}{(n-i-j)!i!j!} = \binom{n}{i,j}$$

et d'autre part :

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \binom{n}{i,j}$$

Les deux égalités sont donc démontrées.

3. (2 points) Comme i, j, n sont positifs et $0 \leq i+j+2 \leq n$ alors $0 \leq i+j+1 \leq n$ et $0 \leq i+j+2 \leq n+1$, donc les quatre coefficients du trinôme impliqués dans l'équation sont bien définis.

On utilise la première égalité démontrée dans la question 2 :

$$\begin{aligned} \binom{n}{i+1,j} + \binom{n}{i,j+1} + \binom{n}{i+1,j+1} \\ &= \binom{n}{i+j+1} \binom{i+j+1}{i+1} + \binom{n}{i+j+1} \binom{i+j+1}{i} + \binom{n}{i+j+2} \binom{i+j+2}{i+1} \\ &= \binom{n}{i+j+1} \left[\binom{i+j+1}{i+1} + \binom{i+j+1}{i} \right] + \binom{n}{i+j+2} \binom{i+j+2}{i+1} \end{aligned}$$

En appliquant deux fois la formule (classique) de Pascal :

$$\begin{aligned} \binom{n}{i+1,j} + \binom{n}{i,j+1} + \binom{n}{i+1,j+1} \\ &= \binom{n}{i+j+1} \binom{i+j+2}{i+1} + \binom{n}{i+j+2} \binom{i+j+2}{i+1} \\ &= \left[\binom{n}{i+j+1} + \binom{n}{i+j+2} \right] \binom{i+j+2}{i+1} \\ &= \binom{n+1}{i+j+2} \binom{i+j+2}{i+1} \end{aligned}$$

Enfin la première formule de la question 2 donne :

$$\binom{n}{i+1,j} + \binom{n}{i,j+1} + \binom{n}{i+1,j+1} = \binom{n+1}{i+1,j+1}$$

Il s'agit du résultat attendu.

4. (2 points) On utilise la seconde égalité de la question 2 :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i, j} a^i b^j c^{n-i-j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} a^i b^j c^{n-i-j}$$

Ceci donne :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i, j} a^i b^j c^{n-i-j} = \sum_{i=0}^n \left[\binom{n}{i} a^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} b^j c^{n-i-j} \right]$$

On applique la formule du binôme de Newton à la somme intérieure :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i, j} a^i b^j c^{n-i-j} = \sum_{i=0}^n \left[\binom{n}{i} a^i (b+c)^{n-i} \right]$$

On applique une seconde fois la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i, j} a^i b^j c^{n-i-j} = (a+b+c)^n$$

Il s'agit du résultat attendu.

Problème 3.

(10 points)

1. (1 point) La somme $S_0 = \sum_{k=1}^0 (-1)^k k^2$ est une somme vide, elle est donc nulle. Ensuite on calcule :

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 & &= 0 \\ S_1 &= -1 & &= -1 \\ S_2 &= -1 + 4 & &= 3 \\ S_3 &= -1 + 4 - 9 & &= -6 \\ S_4 &= -1 + 4 - 9 + 16 & &= 10 \\ S_5 &= -1 + 4 - 9 + 16 - 25 & &= -15 \end{aligned}$$

2. (a) (1,5 points) Soit n un entier naturel pair, et $p = \frac{n}{2}$, si bien que p est un entier et $n = 2p$. On cherche à simplifier :

$$S_n + T_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 + \sum_{k=1}^n k^2$$

Par linéarité on obtient :

$$S_n + T_n = \sum_{k=1}^n ((-1)^k + 1) k^2$$

On remarque que :

$$(-1)^k + 1 = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi lorsque k prend une valeur impaire alors le terme $((-1)^k + 1)k^2$ est nul, donc il ne reste dans la somme $S_n + T_n$ que les termes pour lesquels k est pair.

Lorsque k va de 1 à n il prend les valeurs paires $2, 4, \dots, 2p$, car $n = 2p$. Ainsi il prend les valeurs $2i$ pour i allant de 1 à p :

$$S_n + T_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p} ((-1)^k + 1)k^2 = \sum_{i=1}^p ((-1)^{2i} + 1)(2i)^2$$

Ceci donne :

$$S_n + T_n = \sum_{i=1}^p (2 \times 4i^2)$$

Par linéarité, et comme i est une variable muette :

$$S_n + T_n = 8 \sum_{k=1}^p k^2 = 8T_p$$

Ceci est bien le résultat attendu.

(b) (1,5 points) La formule pour T_n permet de calculer :

$$S_n = 8T_p - T_n = 8 \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Comme $p = \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned} S_n &= 8 \frac{\frac{n}{2} \left(\frac{n+2}{2} \right) \left(2 \frac{n}{2} + 1 \right)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n(n+2)(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)[2(n+2) - (2n+1)]}{6} = \frac{3n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\text{Si } n \text{ est pair : } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. (a) (0,5 point) Si n est impair alors $n-1$ est pair, donc on peut appliquer la formule de la question précédente :

$$\text{Si } n \text{ est impair : } S_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$$

(b) (1,5 points) On obtient S_n à partir de S_{n-1} de la façon suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k^2 + (-1)^n n^2 = S_{n-1} + (-1)^n n^2$$

On utilise la formule de la question précédente :

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} + (-1)^n n^2$$

Comme n est impair alors $(-1)^n = -1$, donc :

$$S_n = \frac{(n-1)n}{2} - n^2 = \frac{-n^2 - n}{2}$$

et finalement :

Si n est impair : $S_n = -\frac{n(n+1)}{2}$

4. (1 point) On constate que l'expression de S_n est la même au signe près, elle est positive si n est pair et négative si n est impair. On peut donc énoncer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

5. (a) (1 point) Par linéarité de la somme :

$$S_n + U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 + \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \sum_{k=1}^n (-1)^k (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n (-1)^k k(k+1)$$

On sait que $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$, donc :

$$S_n + U_n = \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \times 2 \sum_{i=1}^k i \right)$$

Ceci donne bien :

$$S_n + U_n = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^k i$$

- (b) (2 points) On peut écrire :

$$S_n + U_n = 2 \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} (-1)^k i = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n (-1)^k i = 2 \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{k=i}^n (-1)^k \right)$$

La suite $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1 donc :

$$S_n + U_n = 2 \sum_{i=1}^n i \frac{(-1)^i - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)}$$

Par linéarité :

$$S_n + U_n = \sum_{i=1}^n [(-1)^i i + (-1)^{n+1} i] = \sum_{i=1}^n (-1)^i i + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n i$$

La variable i est muette donc $\sum_{i=1}^n (-1)^i i = \sum_{k=1}^n (-1)^k k = U_n$, ce qui donne

$$S_n + U_n = U_n + (-1)^n \sum_{k=1}^n k$$

et donc finalement :

$$S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

On a retrouvé la formule pour S_n .

6. (0 point) On souhaite maintenant calculer $U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k$.

Une méthode possible est d'exploiter l'égalité $k = \sum_{i=1}^k 1$.

Par propriété des sommes triangulaires on obtient :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \left[(-1)^k \sum_{i=1}^k 1 \right] = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^k = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} (-1)^k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n (-1)^k$$

On retrouve la somme des termes de la suite géométrique de raison -1 :

$$U_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i + \sum_{i=1}^n (-1)^n \right)$$

Ceci donne :

$$U_n = \frac{1}{2} \left(\frac{-1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} + n(-1)^n \right) = \frac{1}{4} (-1 + (-1)^n + 2n(-1)^n)$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \frac{(2n+1)(-1)^n - 1}{4}$$

Une autre écriture valide est :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Pour la démontrer il faut séparer le cas où n est pair de celui où n est impair.