Lycée Bellevue – Toulouse **26 septembre 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n^{o}1

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

Les recommandations suivantes sont valables pour tous les Devoirs Surveillés et Devoirs à la Maison.

Il sera tenu grand compte de la qualité de la rédaction lors de la correction. Il est demandé de faire des phrases complètes dans lesquelles ni l'orthographe ni la ponctuation ne sont négligées.

Les réponses doivent être compréhensibles par tous. Toute assertion doit être justifiée. Le raisonnement doit être rédigé au moyen d'adverbes tels que “donc”, “comme”. *Les symboles mathématiques tels que* $\forall$ *et* $\Rightarrow$ *ne doivent pas figurer dans une phrase, à l'exception parfois du signe* $=$. *Tout élément introduit doit être présenté correctement :* Soit x un réel....

Les références au cours doivent être clairement et complètement énoncées. Lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment, il est demandé d'indiquer le numéro de la question utilisée.

Il est inutile de recopier l'énoncé.

Il est aussi demandé d'utiliser des copies doubles, de laisser une marge au correcteur, d'encadrer les résultats finaux, de numéroter les copies (et non les pages) en indiquant leur nombre total. Les annotations au crayon à papier ne seront pas prises en compte.

Les exercices et problèmes sont indépendants et peuvent donc être traités dans le désordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont difficiles, ce qui n'empêche pas de s'y attaquer : il est possible de gagner des points même avec une partie de la réponse. Et si la question n *paraît difficile, peut-être la réponse de la question* $n-1$ *peut-elle aider.*

Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le barème est parfois donné à titre indicatif, il peut être légèrement modifié lors de la correction.

Exercices. *(10 points)*

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Résoudre les équations :

(a) $\sqrt{x^2-7} = |2x-5|$ (b) $3\tan x = 2\cos x$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$A = 1^2 + \left(1^2+2^2\right) + \left(1^2+2^2+3^2\right) + \cdots + \left(1^2+2^2+\cdots+10^2\right)$$

3. Résoudre en fonction du réel λ le système :

$$S : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 3y + 9z = 9 \\ x + \lambda y + \lambda^2 z = \lambda^2 \end{cases}$$

Problème 1. Nombres de Catalan *(10 points)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

1. (a) Calculer c_0, c_1, c_2 et c_3.

(b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n \in \mathbb{N}^*$.

2. On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}$$

(a) Grâce au changement d'indice $i = n-k$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n = \frac{n}{2} S_n$$

(b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{4k+2}{k+2}$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4T_n + 2S_n = T_{n+1} + S_{n+1} - c_{n+1}$$

(d) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} = S_n.$$

Problème 2. *(10 points)*

Soit $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, et f, g les fonctions définies par :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \frac{1}{3}(2\sin x + \tan x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin x}{2 + \cos x}$$

On pose également :

$$\forall x \in I \qquad u(x) = f(x) - x \qquad \text{et} \qquad v(x) = g(x) - x.$$

1. (a) Justifier que u est dérivable sur I, et que sa dérivée s'écrit

$$\forall x \in I \qquad u'(x) = \frac{1}{3\cos^2 x} \times P(\cos x) \qquad \text{où} \quad P(X) = 2X^3 - 2X^2 - (X^2 - 1).$$

(b) En déduire les variations de u sur I.

2. Décrire de même les variations de v sur I.
3. Démontrer que :

$$\forall x \in I \qquad g(x) \leqslant x \leqslant f(x)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\theta_n = \frac{\pi}{3 \times 2^n} \qquad a_n = \sin(\theta_n) \qquad b_n = \cos(\theta_n)$$

4. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}}$$

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leqslant \pi \leqslant v_n \quad$ où :

$$u_n = 9 \times 2^n \left(\frac{a_n}{2 + b_n}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

6. Déterminer la limite de $\dfrac{a_n}{\theta_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers π.