

Devoir Surveillé n°1

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

Les recommandations suivantes sont valables pour tous les Devoirs Surveillés et Devoirs à la Maison.

Il sera tenu grand compte de la qualité de la rédaction lors de la correction. Il est demandé de faire des phrases complètes dans lesquelles ni l'orthographe ni la ponctuation ne sont négligées.

Les réponses doivent être compréhensibles par tous. Toute assertion doit être justifiée. Le raisonnement doit être rédigé au moyen d'adverbes tels que “donc”, “comme”. Les symboles mathématiques tels que $\forall$ et $\Rightarrow$ ne doivent pas figurer dans une phrase, à l'exception parfois du signe $=$. Tout élément introduit doit être présenté correctement : Soit x un réel....

Les références au cours doivent être clairement et complètement énoncées. Lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment, il est demandé d'indiquer le numéro de la question utilisée.

Il est inutile de recopier l'énoncé.

Il est aussi demandé d'utiliser des copies doubles, de laisser une marge au correcteur, d'encadrer les résultats finaux, de numéroter les copies (et non les pages) en indiquant leur nombre total. Les annotations au crayon à papier ne seront pas prises en compte.

Les exercices et problèmes sont indépendants et peuvent donc être traités dans le désordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont difficiles, ce qui n'empêche pas de s'y attaquer : il est possible de gagner des points même avec une partie de la réponse. Et si la question n paraît difficile, peut-être la réponse de la question $n - 1$ peut-elle aider.

Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le barème est parfois donné à titre indicatif, il peut être légèrement modifié lors de la correction.

Exercices.

(8 points)

Les questions ci-dessous sont indépendantes entre elles.

1. Résoudre l'équation : $2\sqrt{3}\sin x \tan x = 1$
2. Résoudre l'équation : $x + 5 = \sqrt{x + 11}$
3. Calculer S où : $S = 1 \times 100 + 2 \times 99 + 3 \times 98 + \dots + 100 \times 1$
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{pk}\right) \geq \sqrt[p]{n+1}$

Problème 1.

(7 points)

1. (a) Résoudre l'équation $\cos(4x) = 0$.
(b) Démontrer que l'intervalle $[0, \pi]$ contient exactement quatre solutions de cette équation et donner ces solutions.

Celles-ci seront notées x_1, x_2, x_3, x_4 avec $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq \pi$.

2. Résoudre l'équation $t^4 - 6t^2 + 1 = 0$ et donner ses solutions sous la forme $\pm a \pm \sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels.
3. Soit x un réel admettant une tangente. Démontrer que :

$$\cos(4x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan^4 x - 6 \tan^2 x + 1 = 0$$

4. En déduire les tangentes de x_1, x_2, x_3 et x_4 .

Problème 2. Coefficients du trinôme

(6 points)

Soit n un entier naturel. Pour tous entiers naturels i et j tels que $0 \leq i + j \leq n$ on note :

$$\binom{n}{i, j} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$$

1. Soit $n \geq 2$. Calculer $\binom{n}{0, 0}$, $\binom{n}{0, 1}$, $\binom{n}{1, 0}$ et $\binom{n}{1, 1}$.
2. Vérifier que pour tous entiers naturels n, i, j tels que $0 \leq i + j \leq n$:

$$\binom{n}{i, j} = \binom{n}{i+j} \binom{i+j}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j}$$

3. Démontrer la formule du tétraèdre de Pascal :

$\forall (n, i, j) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq i + j + 2 \leq n$:

$$\binom{n}{i+1, j} + \binom{n}{i, j+1} + \binom{n}{i+1, j+1} = \binom{n+1}{i+1, j+1}$$

4. Démontrer la formule du trinôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad (a + b + c)^n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i, j} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

Problème 3. Somme alternée des premiers carrés

(10 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$

1. Calculer S_n pour n allant de 0 à 5.

2. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $T_n = \sum_{k=1}^n k^2$

(a) On suppose que n est pair et on note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Justifier que : $S_n + T_n = 8T_p$

(b) En utilisant la formule pour T_n calculer la valeur de S_n dans le cas où n est pair.

3. On suppose dans cette question que n est impair.

(a) À l'aide de la question précédente, donner une formule pour S_{n-1} .

(b) En déduire une expression de S_n en fonction de n .

4. Donner une expression générale de S_n (i.e., une expression valable si n est pair et si n est impair).

5. Dans cette question on retrouve le résultat pour S_n d'une autre façon.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k$.

(a) Démontrer que : $S_n + U_n = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^k i$.

(b) En intervertissant les indices k et i retrouver la formule pour S_n .

6. *Question optionnelle.* Donner une expression générale de U_n en fonction de n .