# TD. B2
# Nombres complexes

## Exercices de cours

**1** Calculer :

a. $a+b$ $ab$ $\frac{a}{b}$ $\frac{b}{a}$ avec $a=4-i$ et $b=3+2i$

b. $i^2$ $i^3$ $i^4$ $i^{27}$ $i^{270576}$

c. $(-i)^2$ $(-i)^3$ $(-i)^4$

d. $(1+i)^2$ $(1+i)^3$ $(1+i)^4$ $(1+i)^8$ $(1+i)^{27}$

**2** Donner la forme algébrique de :

$$z_1=2e^{i\frac{5\pi}{2}} \qquad z_2=4e^{-i\frac{4\pi}{3}} \qquad z_3=\sqrt{2}e^{i3\pi}$$

Donner une forme exponentielle de :

$$z_4=\sqrt{3}-i \quad z_5=-4i \quad z_6=5-5i \quad z_7=-7$$

**3** Calculer $\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{24}$.

**4** Retrouver les formules donnant $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

**5** Linéariser $\cos^2 t\sin^2 t$ puis calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\sin^2 t\,dt$$

**6** Retrouver et démontrer les formules de transformation de somme en produit :

$$\cos p+\cos q=\cdots \qquad \sin p+\sin q=\cdots$$
$$\cos p-\cos q=\cdots \qquad \sin p-\sin q=\cdots$$

**7** Résoudre l'équation : $\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{2}$.

Déterminer les extrema de la fonction

$$f:x\mapsto\sqrt{3}\cos x-\sin x.$$

En quels points sont-ils atteints ?

**8** Soit $A$, $B$, $C$, $D$ les quatre points d'affixes respectives $a=-1+i$, $b=4+3i$, $c=3-9i$, $d=1+6i$.

Représenter ces quatre points.

Quelles propriétés ont les triangles $ABC$ et $ABD$ ?

**9** Résoudre les équations suivantes :

a. $z^2-(1+2i)z-1+i=0$ b. $z^2-iz-1=0$

c. $z^2-(1+i)z+2+2i=0$ d. $z+\frac{1}{z}=i\left(\frac{3}{z}-1\right)$

e. $\begin{cases} z_1+z_2=6i \\ z_1z_2=-13 \end{cases}$ f. $z^2+z-i=0$

**10** Déterminer et représenter $\mathbb{U}_6$ et $\mathbb{U}_8$.

**11** Résoudre l'équation : $32z^4=\sqrt{3}i-1$

**12** Résoudre les équations :

a. $e^z=\sqrt{3}+i$ b. $e^{iz\pi}=1-i$

c. $e^{1-z}+e^z=\sqrt{2e}$

## Travaux dirigés

**1** Calculer les complexes suivants :

$a=\frac{(3+5i)^2}{1-2i}$ $b=\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$ $c=\frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$

$d=\frac{(4+3i)(3+4i)}{(4-3i)(3-4i)}$ $e=e^{i\frac{\pi}{6}}+ie^{i\frac{\pi}{3}}$ $f=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

$g=1+i+i^2+\cdots+i^{21}$ $h=\sum_{k=1}^{9}\binom{9}{k}(i\sqrt{3})^k$

$j=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(i)^{2k}(1+i)^{8-k}$ $l=\sum_{k=0}^{8}(i)^{2k}(1+i)^{8-k}$

**2** Donner une forme exponentielle des complexes suivants :

$a=3-3i$ $b=-5i$ $c=3+\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$d=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right)\left(-\sqrt{6}+\sqrt{6}i\right)$ $e=\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

**3** Démontrer la *formule du parallélogramme* :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2 \quad |z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2)$$

puis l'inégalité :

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2 \quad |z|+|z'|\leqslant|z+z'|+|z-z'|$$

**4** Représenter l'ensemble des points du plan d'affixe $z$ vérifiant :

a. $|z+2i|\leqslant 2$ b. $|z+2i|=|z-6|$

c. $\frac{\pi}{6}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$ d. $|z|^2-2\operatorname{im} z=1$

e. $z^6\in\mathbb{R}$ f. $\operatorname{Im}\left(z^2\right)\leqslant 2$

**5** Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin t\,dt \qquad I_2=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$I_3=\int_0^{\pi}\sin^3 t\,dt \qquad I_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos 4t\sin 3t\,dt$$

$$I_5=\int_{\pi}^{2\pi}\cos^4 t\,dt \qquad I_6=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin^2 t\sin 3t\,dt$$

$$I_7=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\cos 2t\cos 3t\,dt$$

**6** Calculer les sommes suivantes, avec $x$ réel fixé.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \sin kx \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx \qquad d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$$

**7** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ :

a. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
b. $z^2 - (1+3i)z - 4 = 0$
c. $z + \frac{10}{z} = 3 - 2i$
d. $z^4 - 2z^2\cos\theta + 1 = 0$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)
e. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$
f. $(z^2 - 3z - 1)^2 + (4z - 7)^2 = 0$
g. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 + 8i \end{cases}$
h. $\bar{z} + iz = 1$
j. $|z| + iz = 1$
k. $2z + 3\bar{z} + 6|z|^2 = 65 + 3i$
l. $|z - 4| = |z + 2i|$
m. $8 + z^6 = 0$
n. $z^6 + (2-i)z^3 + 2 + 2i = 0$
o. $z^4 + 7 + 24i = 0$
p. $(1+z)^5 = (1-z)^5$
q. $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)
r. $(2-z)^n = z^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

**8** Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + jy + j^2 z = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ x + j^2 y + jz = e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

**9** Soit $\omega$ une racine $5^{\text{ème}}$ de l'unité différente de 1.

a. Calculer $\sum_{k=0}^{4} \omega^k$.
b. Soit $z_1 = \omega + \omega^4$ et $z_2 = \omega^2 + \omega^3$. Démontrer que $z_1$ et $z_2$ satisfont l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.
c. En déduire les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$, puis celle de $\cos\frac{\pi}{5}$.

**10** Soit $n$ un entier naturel strictement positif.

a. Soit $p$ et $q$ deux réels.
Déterminer le module de $e^{ip} - e^{iq}$.
b. En déduire la distance entre deux racines $n$-èmes de l'unité consécutives.
c. Calculer le périmètre puis l'aire du polygone régulier formé par les racines $n$-èmes de l'unité.
d. Donner les limites du périmètre et de l'aire calculés précédemment lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**11** Soit $z$ un complexe différent de 1.

a. À quelle condition nécessaire et suffisante le complexe $\frac{z+1}{z-1}$ est-il
*(i)* réel ?
*(ii)* imaginaire pur ?
*(iii)* de module 1 ?
b. En considérant les points $A$, $B$, $M$ d'affixes respectives 1, $-1$, $z$, retrouver géométriquement les résultats des questions *(i)* et *(iii)* ci-dessus.
Quelle théorème démontre-t-on grâce au *(ii)* ?

**12** À tout point $M$ d'affixe $z$ différente de 1 on associe le point $M'$ d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-z}$.

a. Démontrer que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\frac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
b. En déduire une construction géométrique du point $M'$ connaissant le point $M$.
c. Quel est le module de $z'$ ?

**13** Soit $z$ un complexe non-nul et différent de 1, et $A$, $B$, $C$ les points d'affixes respectives $z$, $z^2$ et $z^3$.

a. Démontrer que $A$, $B$, $C$ sont alignés si et seulement si $z$ est réel.
b. Démontrer que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $z$ admet $-1$ pour partie réelle.
c. Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle $ABC$ soit rectangle en $B$.

**14** Quel est l'ensemble des points $M$ du plan complexe d'affixe $z$ tels que
a. les points d'affixes $z$, $z^2$ et $z^4$ soient alignés ?
b. les points d'affixes $z$, $\frac{1}{z}$ et $(z-i)$ soient alignés ?

**15** Soit $\mathscr{C}$ un cercle du plan complexe de centre $O$ et de rayon $R$. Soient $A$ et $B$ deux points de $\mathscr{C}$ distincts. On note $a$ et $b$ les affixes respectives de $A$ et $B$, puis $\alpha$ et $\beta$ des arguments de $a$ et $b$.

a. Démontrer que si $M$ est un point de $\mathscr{C}$ d'affixe $z$ différente de $a$ alors :
$$\arg\left(\frac{b}{a}\right) = 2\arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right)$$
b. En déduire que l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ ne dépend pas, modulo $\pi$, de la position de $M$ sur le cercle, et qu'il est égal à la moitié de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

**16** Soit $ABC$ un triangle noté dans le sens direct, $a$, $b$, $c$ les d'affixes respectives de $A$, $B$, $C$. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Démontrer que la triangle $ABC$ est équilatéral si et seulement si :

$$a + jb + j^2 c = 0.$$

**17** Soit $A$, $B$, $C$ trois points d'affixes respectives $a$, $b$, $c$. Soit $A'$, $B'$, $C'$ les milieux des côtés opposés aux points $A$, $B$, $C$.

Soit $G$ le point d'affixe $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$, appelé *centre de gravité* du triangle $ABC$.

a. Démontrer que $A$, $A'$, $G$ sont alignés, de même que $B$, $B'$, $G$ et $C$, $C'$, $G$.

b. En déduire que $G$ est l'intersection des trois médianes du triangle $ABC$, *i.e.,* des droites reliant les points de ce triangle au milieu de leurs côtés opposés.

**18** En utilisant les résultats des deux exercices précédents, démontrer le *Théorème de Napoléon* :

Soit $ABC$ un triangle. On construit les points $A'$, $B'$, $C'$, $U$, $V$, $W$ tels que :

- $A'CB$, $ACB'$ et $AC'B$ sont les triangles équilatéraux extérieurs à $ABC$
- $U$, $V$ et $W$ sont les centres de gravité respectifs de ces triangles.

Alors le triangle $UVW$ est équilatéral.