TD. B1
Nombres complexes

Exercices de cours

1 Calculer :

a. $a+b \quad ab \quad \frac{a}{b} \quad \frac{b}{a}$ avec $a=4-i$ et $b=3+2i$
b. $i^2 \quad i^3 \quad i^4 \quad i^{27} \quad i^{270576}$
c. $(-i)^2 \quad (-i)^3 \quad (-i)^4$
d. $(1+i)^2 \quad (1+i)^3 \quad (1+i)^4 \quad (1+i)^8 \quad (1+i)^{27}$

2 Donner la forme algébrique de :

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{2}} \qquad z_2 = 4e^{-i\frac{4\pi}{3}} \qquad z_3 = \sqrt{2}e^{i3\pi}$$

Donner une forme exponentielle de :

$$z_4 = \sqrt{3}-i \quad z_5 = -4i \quad z_6 = 5-5i \quad z_7 = -7$$

3 Calculer $\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{24}$.

4 Retrouver les formules donnant $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

5 Linéariser $\cos^2 t \sin^2 t$ puis calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \sin^2 t \, dt$$

6 Retrouver et démontrer les formules de transformation de somme en produit :

$$\cos p + \cos q = \cdots \qquad \sin p + \sin q = \cdots$$
$$\cos p - \cos q = \cdots \qquad \sin p - \sin q = \cdots$$

7 Résoudre l'équation : $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.
Déterminer les extrema de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{3}\cos x - \sin x.$$

En quels points sont-ils atteints ?

8 Soit A, B, C, D les quatre points d'affixes respectives $a=-1+i$, $b=4+3i$, $c=3-9i$, $d=1+6i$.
Représenter ces quatre points.
Quelles propriétés ont les triangles ABC et ABD ?

9 Résoudre les équations suivantes :

a. $z^2-(1+2i)z-1+i=0$ b. $z^2-iz-1=0$
c. $z^2-(1+i)z+2+2i=0$ d. $z+\frac{1}{z}=i\left(\frac{3}{z}-1\right)$
e. $\begin{cases} z_1+z_2 = 6i \\ z_1z_2 = -13 \end{cases}$ f. $z^2+z-i=0$

10 Déterminer et représenter $\mathbb{U}_6$ et $\mathbb{U}_8$.

11 Résoudre l'équation : $32z^4 = \sqrt{3}i - 1$

12 Résoudre les équations :

a. $e^z = \sqrt{3}+i$ b. $e^{iz\pi} = 1-i$
c. $e^{1-z}+e^z = \sqrt{2e}$

Travaux dirigés

1 Calculer les complexes suivants :

$a = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$ $\quad b = \left(1+\sqrt{3}i\right)^3$ $\quad c = \frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$

$d = \frac{(4+3i)(3+4i)}{(4-3i)(3-4i)}$ $\quad e = e^{i\frac{\pi}{6}} + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad f = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

$g = 1+i+i^2+\cdots+i^{21}$ $\quad h = \sum\limits_{k=1}^{9}\binom{9}{k}(i\sqrt{3})^k$

$j = \sum\limits_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(i)^{2k}(1+i)^{8-k}$ $\quad l = \sum\limits_{k=0}^{8}(i)^{2k}(1+i)^{8-k}$

2 Donner une forme exponentielle des complexes suivants :

$a = 3-3i$ $\quad b=-5i$ $\quad c = 3+\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$
$d = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right)\left(-\sqrt{6}+\sqrt{6}i\right)$ $\quad e = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

3 Démontrer la *formule du parallélogramme* :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2+|z'|^2)$$

puis l'inégalité :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z|+|z'| \leqslant |z+z'|+|z-z'|$$

4 Représenter l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant :

a. $|z+2i| \leqslant 2$ b. $|z+2i| = |z-6|$
c. $\frac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ d. $|z|^2 - 2\,\mathrm{im}\, z = 1$
e. $z^6 \in \mathbb{R}$ f. $\mathrm{Im}\left(z^2\right) \leqslant 2$

5 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \sin^3 t \, \mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 4t \sin 3t \, \mathrm{d}t$$

$$I_5 = \int_{\pi}^{2\pi} \cos^4 t \, \mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 t \sin 3t \, \mathrm{d}t$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \cos 2t \cos 3t \, \mathrm{d}t$$

6 Calculer les sommes suivantes, avec x réel fixé.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \sin kx \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx \qquad d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$$

7 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

a. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
b. $z^2 - (1+3i)z - 4 = 0$
c. $z + \frac{10}{z} = 3 - 2i$
d. $z^4 - 2z^2 \cos\theta + 1 = 0$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)
e. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$
f. $(z^2 - 3z - 1)^2 + (4z - 7)^2 = 0$
g. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 + 8i \end{cases}$
h. $\bar{z} + iz = 1$
j. $|z| + iz = 1$
k. $2z + 3\bar{z} + 6|z|^2 = 65 + 3i$
l. $|z - 4| = |z + 2i|$
m. $8 + z^6 = 0$
n. $z^6 + (2-i)z^3 + 2 + 2i = 0$
o. $z^4 + 7 + 24i = 0$
p. $(1+z)^5 = (1-z)^5$
q. $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)
r. $(2-z)^n = z^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

8 Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + jy + j^2 z = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ x + j^2 y + jz = e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

9 Soit z un complexe différent de 1.

À quelle condition nécessaire et suffisante le complexe $\frac{z+1}{z-1}$ est-il réel ? Imaginaire pur ? De module 1 ?

Résoudre cet exercice par le calcul puis par la géométrie.

10 À tout point M d'affixe z différente de 1 on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

a. Démontrer que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\frac{z'+1}{\bar{z}-1}$ est imaginaire pur.
b. En déduire une construction géométrique du point M' connaissant le point M.
c. Quel est le module de z' ?

11 Soit z un complexe non-nul et différent de 1, et A, B, C les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3.

a. Démontrer que A, B, C sont alignés si et seulement si z est réel.
b. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si z admet -1 pour partie réelle.
c. Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

12 Quel est l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que

a. les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés ?
b. les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $(z - i)$ soient alignés ?

13 Soit n un entier naturel strictement positif.

a. Soit p et q deux réels.
   Déterminer le module de $e^{ip} - e^{iq}$.
b. En déduire la distance entre deux racines n-èmes de l'unité consécutives.
c. Calculer le périmètre puis l'aire du polygone régulier formé par les racines n-èmes de l'unité.
d. Donner les limites du périmètre et de l'aire calculés précédemment lorsque n tend vers $+\infty$.

14 Soit $\mathscr{C}$ un cercle du plan complexe de centre O et de rayon R. Soient A et B deux points de $\mathscr{C}$ distincts. On note a et b les affixes respectives de A et B, puis α et β les arguments de a et b.

a. Démontrer que si M est un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z différente de a alors :
$$\arg\left(\frac{b}{a}\right) = 2\arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right)$$
b. En déduire que l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ ne dépend pas, modulo π, de la position de M sur le cercle, et qu'il est égal à la moitié de l'angle $(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{OB})$.

15 Soit A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c. Soit A', B', C' les milieux des côtés opposés aux points A, B, C.

Soit G le point d'affixe $g = \frac{1}{3}(a + b + c)$, appelé *centre de gravité* du triangle ABC.

a. Démontrer que A, A', G sont alignés, de même que B, B', G et C, C', G.
b. En déduire que G est l'intersection des trois médianes du triangle ABC, *i.e.,* des droites reliant les points de ce triangle au milieu de leurs côtés opposés.

N. B. Dans les exercices suivants les triangles sont notés dans le sens direct, c'est-à-dire que la notation ABC sous-entend que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est orienté dans le sens direct.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Soit A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Démontrer que la triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a + jb + j^2c = 0.$$

$\boxed{\mathbf{17}}$ En utilisant les résultats des deux exercices précédents, démontrer le *Théorème de Napoléon* :

Soit ABC un triangle. On construit les points A', B', C', U, V, W tels que :

- $A'CB$, ACB' et $AC'B$ sont les triangles équilatéraux extérieurs à ABC
- U, V et W sont les centres de gravité respectifs de ces triangles.

Alors le triangle UVW est équilatéral.