Chapitre B2
Nombres complexes

I. Généralités

A. Nombres complexes

Définition

Soit i un nombre vérifiant $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $x + iy$ où x et y sont deux réels :

$$\mathbb{C} = \left\{ x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ces nombres sont appelés *nombres complexes*.

Exemples. 0, 1, i, $3 + 4i$, 25, $\frac{7}{4} - \frac{i}{2}$, $\sqrt{2} - 5i$, π sont des nombres complexes.

Remarques.

(i) L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication.

(ii) Tout nombre complexe z possède un opposé $-z$.

(iii) Tout nombre complexe z non-nul possède un inverse $\frac{1}{z}$.

(iv) On définit ainsi également la soustraction et la division par un complexe non-nul

Exemple.

Démonstration du *(iii)*. Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$. Alors $x^2 + y^2 \neq 0$ et :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

L'inverse de z est bien défini, et c'est un nombre complexe. □

Définition

Soit $z = x + iy$ est un nombre complexe avec x et y réels. On dit alors que x est la *partie réelle* et y est la *partie imaginaire* de z.

On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Exemples.

$$\mathrm{Re}(3 + 2i) = 3 \qquad \mathrm{Im}(3 + 2i) = 2 \qquad \mathrm{Re}(i) = 0 \qquad \mathrm{Im}(i) = 1$$

Attention : $\mathrm{Im}(z)$ est réel.

Définition

- Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ alors on dit que z est réel.
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors on dit que z est *imaginaire pur*.
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- L'*image* de $z = x + iy$ est le point M du plan de coordonnées (x, y).
- On dit alors que z est l'*affixe* de M.
- Les deux axes du repère sont l'axe des réels et l'axe des imaginaires purs.



Remarque. Soit z et z' sont deux complexes, d'images M et M'. Alors :

- $z + z'$ admet pour image le point M'' tel que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ admet pour affixe $z' - z$.

B. Conjugaison

Définition

Soit $z = x + iy$ un complexe. Le *conjugué* de z est le complexe :

$$\overline{z} = x - iy$$

Remarque. Les images de z et de $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Exemples.

$$\overline{4+3i} = 4-3i \qquad \overline{1-6i} = 1+6i \qquad \overline{5} = 5 \qquad \overline{7i} = -7i$$

Propositions

- Pour tout complexe z : $\quad \overline{\overline{z}} = z \quad$ (on dit que la conjugaison est une *involution*).
- Pour tous complexes z_1 et z_2 :

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{z_1-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

  Ceci en supposant que z_2 est non-nul dans le dernier cas.
- Pour tout complexe z et tout entier naturel n :

$$\overline{nz} = n\overline{z} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Démonstration. Il suffit de tout écrire. Par exemple :

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} \\ &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\end{aligned}$$

□

Proposition

Pour tout complexe z :

- $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$

Démonstration. Immédiat. □

▶ **Exercice 1.**

C. Module

Définition

Soit z un nombre complexe. Le *module* de z est :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Si $z = x + iy$ avec x et y réels alors :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remarques.

- Le module est bien défini, c'est un réel positif : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \in \mathbb{R}_+$
- Si z est réel alors son module coïncide avec sa valeur absolue.
- Il représente la distance du point image M_z à l'origine.

Proposition

Soit A et B deux points du plan, d'affices respectives a et b.
Alors la distance de A à B est $|b - a|$.

Démonstration. En effet $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ donc $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$. □

Définition

Soit A un point d'affixe a, r un réel positif. On définit :

- Le *cercle* de centre A et de rayon r : $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$
- Le *disque ouvert* de centre A et de rayon r : $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$
- Le *disque fermé* de centre A et de rayon r : $\overline{\mathscr{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\}$

Proposition

Soit z et z' deux complexes, n un entier naturel. Alors :

$$|zz'| = |z||z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ si } z' \neq 0 \qquad |z^n| = |z|^n$$

Démonstration. (Exercice) Il suffit de tout écrire. □

Proposition (Inégalité triangulaire)

Pour tous complexes z et z' :

$$||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Remarque. En remplaçant z' par $-z'$ on obtient une autre inégalité triangulaire :

$$||z| - |z'|| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Lemme

Pour tout complexe z :

$$\textit{(i)} \quad |\overline{z}| = |z| \qquad \text{et} \qquad \textit{(ii)} \quad \begin{array}{l} -|z| \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant |z| \\ -|z| \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant |z| \end{array}$$

Démonstration.

(i) Par définition du module : $|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = |z|$.

(ii) On raisonne par équivalences successives, en utilisant la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \qquad -a \leqslant x \leqslant a \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leqslant a^2$$

appliquée à $a = |z|$. □

Démonstration de l'inégalité triangulaire.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_1, \ldots, z_n$ des complexes. Alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Démonstration. Par récurrence sur n. □

II. Angles

A. L'ensemble $\mathbb{U}$

Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \left\{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Remarque. L'ensemble des images des éléments de $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

Propositions

- Soit x et y deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.
- Pour tout élément z de $\mathbb{U}$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Définition

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on pose :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ainsi $\mathbb{U}$ est l'ensemble des $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

Proposition

Pour tous réels θ et θ' : $\quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

Démonstration. Ceci est conséquence des formules de somme de trigonométrie. □

B. Argument

Remarque. Soit z un nombre complexe non-nul. Soit r son module.
Alors $\frac{z}{r}$ est bien défini, car r est non-nul. De plus il est de module 1 car $\left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{r} = 1$.
Ceci montre que $\frac{z}{r}$ appartient à $\mathbb{U}$ et ainsi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{z}{r} = e^{i\theta}$
Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $z = re^{i\theta}$

Définition

Soit z un complexe non-nul, et r son module.
Un *argument* de z est un réel θ tel que $z = re^{i\theta}$.
On note $\theta = \arg z$.

Remarque. La notation $\arg z$ est dangereuse car l'argument est défini à 2π près. On peut avoir par exemple en même temps $\arg z = \frac{\pi}{6}$ et $\arg z = \frac{13\pi}{6}$.
On dit que $\frac{\pi}{6}$ est *un* argument de z.

Proposition

Le module d'un complexe est unique, alors que son argument est défini à 2π près.
En d'autres termes :
Soit r et r' sont deux réels strictement positifs et θ et θ' sont deux réels. Alors :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta' = \theta + 2k\pi$$
$$\iff r = r' \quad \text{et} \quad \theta' \equiv \theta \quad [2\pi]$$

Définition

Soit $z = x + iy = re^{i\theta}$ un complexe, avec x, y, r, θ réels, r strictement positif.

- L'écriture $z = x + iy$ est la *forme algébrique* de z.
- L'écriture $z = re^{i\theta}$ est une *forme exponentielle* de z.

Proposition (Passage d'une forme à l'autre)

Avec les notations de la définition précédente :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \text{ est un réel tel que } \begin{cases} \frac{x}{r} = \cos\theta \\ \frac{y}{r} = \sin\theta \end{cases} \end{cases}$$

▶ **Exercices 2, 3.**

Proposition

Soit z et z' deux complexes non-nuls, n un entier. Alors modulo 2π :

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \qquad \arg\left(z^n\right) \equiv n \arg z$$

Démonstration. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ alors :

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \qquad \text{donc} \qquad \arg(zz') = \theta + \theta' = \arg z + \arg z'$$

Les autres formules se démontrent de la même façon. □

Vision géométrique de la multiplication et de l'inversion.

C. Aspect dynamique

Définitions

- Soit b un complexe. Alors l'application $z \mapsto z+b$ est la *translation* de vecteur $\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe b.
- Soit k un réel non-nul. Alors l'application $z \mapsto kz$ est l'*homothétie* de centre O et de rapport k.
- Soit θ un réel. Alors l'application $z \mapsto e^{i\theta}z$ est la *rotation* de centre O et d'angle θ.
- L'application $z \mapsto \overline{z}$ est la *symétrie* d'axe (Ox).

Remarque. Soit a un complexe non-nul, de forme exponentielle $a = re^{i\theta}$.

Alors l'application $z \mapsto az$ est la composée de la rotation de centre O et d'angle θ avec l'homothétie de centre O et de rapport r.

Définition

Soit a et b deux complexes, a étant non-nul. L'application $f : z \mapsto az+b$ est appelée *similitude directe* du plan.

D. Applications à la trigonométrie

Rappel

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Exemple 1. Calcul de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

▶ **Exercice 4.**

Proposition - Formules d'Euler

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. En effet :

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \mathrm{Im}\,(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} \qquad \text{avec} \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \square$$

Exemple 2 (Linéarisation).

(i) Linéariser $\cos^3 t \sin t$ et calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t\, dt$

(ii) Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos 3t \sin 4t\, dt$

▶ **Exercice 5.**

Remarque. Par linéarisation on obtient les *formules de transformation de produit en somme* :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \cos x \cos y &= \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ \sin x \sin y &= \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \sin x \cos y &= \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \end{aligned}$$

Mais elle découlent plus rapidement des formules de sommes.

Proposition - Formules en $t = \tan\frac{x}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, si bien que $t = \tan\frac{x}{2}$ existe. Alors :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration.

Méthode (Factorisation par l'angle moitié, ou par l'angle moyen)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$1 + e^{i\theta} =$

Soit p et q deux réels.

$e^{ip} + e^{iq} =$

On obtient des formules similaires pour $1 - e^{i\theta}$ et $e^{ip} - e^{iq}$.

Remarque. Cette méthode permet d'obtenir les *formules de transformation de somme en produit* :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2} \end{aligned}$$

▶ **Exercice 6.**

Exemple 3. Soit θ un réel non multiple de 2π. Simplifier la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$.

Proposition - Transformation de Fresnel

(Augustin Fresnel, France, 1788 – 1827) Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = a\cos t + b\sin t$$

Alors il existe deux réels A et φ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = A\cos(t-\varphi)$$

Démonstration. On divise $f(t)$ par $A = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{f(t)}{A} = a'\cos t + b'\sin t \qquad \text{avec} \qquad a' = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad b' = \frac{b}{A}$$

Comme $a'^2 + b'^2 = 1$, alors il existe un réel φ tel que $a' = \cos\varphi$ et $b' = \sin\varphi$, d'où le résultat.

D'un autre point de vue on peut poser $z = a + ib$, puis $A = |z|$ et $\varphi = \arg z$. Alors :

$$f(t) = A\cos\varphi\cos t + A\sin\varphi\sin t = A\cos(t-\varphi)$$ □

Exemple 4. Quels sont les extrema de la fonction $f : t \mapsto 2\cos t + 3\sin t$?

▶ **Exercice 7.**

E. Applications à la géométrie du plan

Lemme

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs, d'affixes non-nulles z et z'.
Alors l'argument $\frac{z'}{z}$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{u}')$.

Démonstration. Soit $a = \frac{z'}{z}$ et soit $a = re^{i\theta}$ sa forme exponentielle.
Alors $z' = re^{i\theta}z$, donc $\arg z' = \theta + \arg z$.
Ceci montre que l'angle $(\vec{u}, \vec{u}')$ est de mesure θ. □

Proposition

Soit A, B, C, D quatre points du plan, d'affixes respectives a, b, c, d, avec $a \neq b$ et $c \neq d$.
Alors $\dfrac{d-c}{b-a}$ admet
- pour argument une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$,
- pour module le quotient $\frac{CD}{AB}$.

Corollaire

Avec les mêmes notations :
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ est réel.
- Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur.
- Les longueurs AB et CD sont égales si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ appartient à $\mathbb{U}$.

Exemple. Soit A, B, C trois points distincts. Alors :

Les points A, B, C sont alignés si et seulement si	$\dfrac{c-a}{b-a} \in$
Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si	$\dfrac{c-a}{b-a} \in$
Le triangle ABC est isocèle ($AB = AC$) si et seulement si	$\dfrac{c-a}{b-a} \in$
Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si	$\dfrac{c-a}{b-a}$

▶ **Exercice 8.**

III. Équations algébriques

A. Équations du second degré

Lemme

Tout nombre complexe non-nul possède exactement deux racines carrées distinctes.

Démonstration. Soit a un complexe non nul de forme exponentielle $a = re^{i\theta}$.

Soit z une racine carrée de a, de forme exponentielle $z = se^{i\varphi}$.

Alors $z^2 = a$, ce qui donne :

$$s^2 e^{2i\varphi} = re^{i\theta}$$

Donc $s^2 = r$ et $2\varphi = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $s = \sqrt{r}$ car s est positif et $\varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi$.

Ceci montre que $z = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou $z = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$: on a obtenu deux solutions distinctes, donc il existe exactement deux racines carrées de a. □

Théorème

Soit a, b, c trois complexes, avec a non-nul. On note (C) l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appelle *discriminant* de l'équation (C).
Soit η une racine carrée de Δ. Alors l'équation (C) admet pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \eta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \eta}{2a}$$

Ces solutions sont égales si et seulement si $\Delta = 0$.

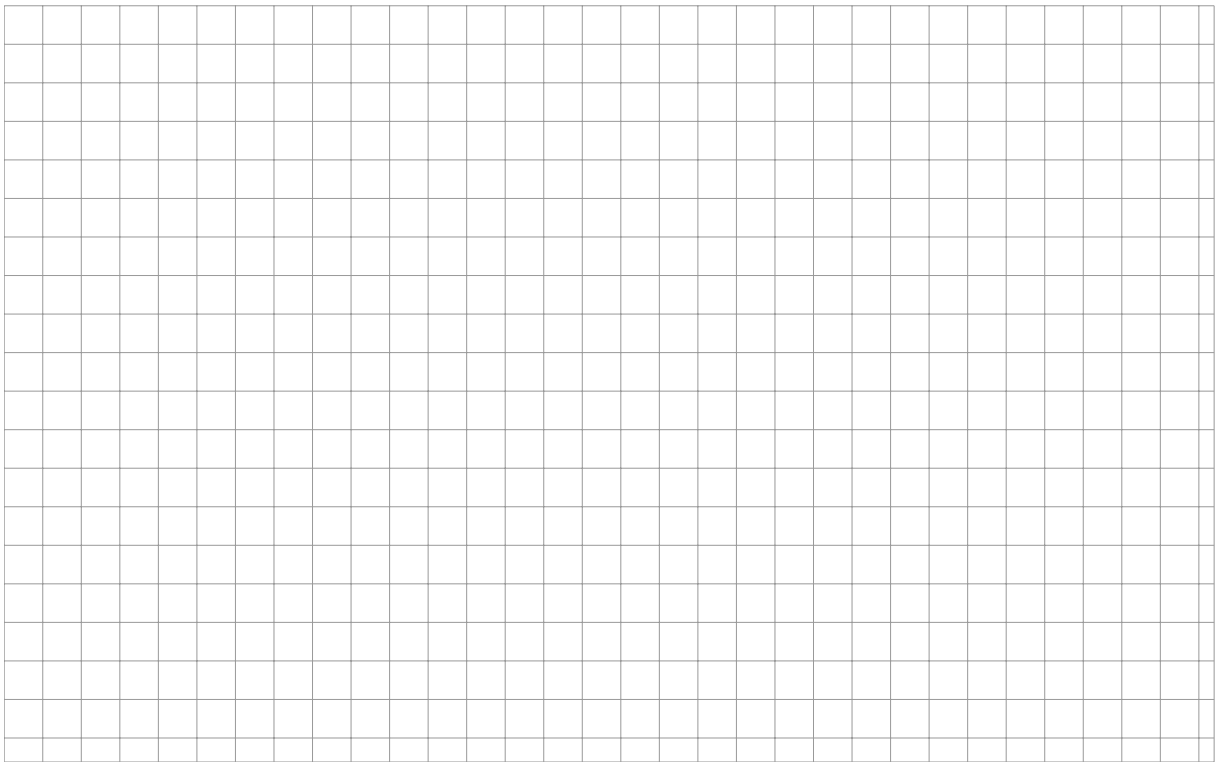
Attention

On ne peut pas écrire $\sqrt{\Delta}$ si Δ n'est pas un réel positif.

Démonstration. Page suivante.

Exemple 5. Résoudre l'équation : $z^2 - (3 - 8i)z - (13 + 11i) = 0$

Démonstration. On utilise la forme canonique d'une expression du second degré :



Méthode : calcul de la racine carrée d'un complexe Δ

- Si la forme exponentielle est connue : $\Delta = re^{i\theta}$, alors il suffit de poser $\eta = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
- Sinon on pose $\eta = a + ib$ et on résout $\eta^2 = \Delta$.
  On ajoute l'équation $|\eta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta|$.

Exemple 6. Donner une racine carrée des complexes suivants.

$$\Delta_1 = -4 \qquad \Delta_2 = 5 \qquad \Delta_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Delta_4 = 2i \qquad \Delta_5 = -i \qquad \Delta_6 = -2 - 2i\sqrt{3}$$

Proposition

Si z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration. À faire en exercice.

▶ **Exercice 9.**

B. Racines de l'unité

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions distinctes.

Définition

Ces n solutions sont appelées *racines n-èmes de l'unité*. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$:

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

Démonstration.

Proposition

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \;\middle|\; k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Exemple 7. Représentation graphique de $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Remarque. Les racines n-èmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

▷ **Exercice 10.**

Théorème - Somme et produit des racines de l'unité

La somme des racines n-èmes de l'unité est nulle si $n > 1$. Leur produit vaut 1 si n est impair, -1 sinon.

$$\forall n \geqslant 2 \quad \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1 \quad \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = (-1)^{n-1}$$

Démonstration.

C. Racines n-èmes

Rappel : racines n-èmes dans $\mathbb{R}$.

- Soit a un réel non-nul.
  - Si n est impair alors l'équation $x^n = a$ admet une unique solution.
  - Si n est pair alors elle en admet deux si a est positif et aucune si a est négatif.
- Soit a un réel positif.
  - Alors l'équation $x^n = a$ admet une et une seule solution positive.
    On appelle celle-ci *racine n-ème de a* et on la note $\sqrt[n]{a}$.

Proposition

Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).
Alors tout complexe non-nul admet exactement n racines n-èmes distinctes.

Démonstration.

Méthode. Obtenir les racines n-èmes de $a \in \mathbb{C}^*$

- Déterminer la forme exponentielle $a = re^{i\theta}$.
- En déduire une première racine n-ème : $b = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$.
- Les racines n-èmes de a sont les complexes $b\zeta$ où $\zeta \in \mathbb{U}_n$.

Exemple 8. Résoudre l'équation : $z^3 = 8i$

Remarque. Les solutions forment encore un polygone régulier à n côtés, mais il n'est pas en général inscrit dans le cercle trigonométrique.

▶ **Exercice 11.**

IV. L'exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ un complexe, avec x et y réels. On note

$$e^z = e^x e^{iy}$$

et on appelle *exponentielle* de z ce complexe.

La fonction $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie est appelée *exponentielle complexe*.
$z \longmapsto e^z$

Propositions

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $e^z \neq 0$
- Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$: $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
- Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$: $|e^z| = e^x$ et $\arg(e^z) = y$

Cette dernière proposition montre que la forme algébrique de z donne la forme exponentielle de e^z.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Proposition

Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle.
En d'autres termes l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est *surjective*.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors on peut écrire $z = re^{i\theta}$ avec r strictement positif, donc $z = e^a$ avec $a = \ln r + i\theta$. □

Remarque. Soit z et z' deux complexes.

Alors $e^z = e^{z'}$ si et seulement si il existe un entier k tel que $z = z' + 2ik\pi$.

Ceci montre que l'on n'a pas unicité de l'antécédent : l'application n'est pas *injective*, *i.e.*, l'égalité $e^z = e^{z'}$ n'implique pas que $z = z'$.

▶ **Exercice 12.**