TD. A3
Fonctions d'une variable réelle

Exercices de cours

1 Donner les périodes des fonctions suivantes.

$$f(x) = \tan\frac{x}{2} \qquad g(x) = \frac{\cos 4x}{\sin 6x}$$
$$h(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec $(A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ et A, ω non-nuls.

2 Démontrer que la fonction
$$f : x \mapsto \cos x + \cos(\pi x)$$
n'est pas périodique.

3 Démontrer que :
$$\forall x \in [0, 2] \qquad \frac{1}{3} \leqslant \frac{x+1}{x^2+3} \leqslant \frac{1}{2}$$

4 Tracer les droites d'équations :
$$y = 3 - 2x \qquad y = \frac{x}{2} + 3 \qquad 2x - 5y = 1$$

5 Déterminer une équation de la droite passant par les points de coordonnées $(4, 5)$ et $(-1, 2)$, puis $(-1, 0)$ et $(6, -1)$.

6

a. Démontrer que la fonction inverse
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$
est dérivable sur son ensemble de définition et donner sa fonction dérivée.

b. Démontrer que la fonction racine carrée
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$
est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

7 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 15 \qquad f_2(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x}$$
$$f_3(x) = xe^x \qquad f_4(x) = \cos x \sin x$$
$$f_5(x) = \frac{x^2 - 5x - 14}{x+2} \qquad f_6(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

8 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2) \qquad f_8(x) = \cos^2(3x)$$
$$f_9(x) = \ln((x+6)^2) \qquad f_{10}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$
$$f_{11}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad f_{12} = \frac{1}{(x^2+3x-5)^2}$$

9 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :
$$f : x \mapsto \sqrt{x - x^2}$$
Sur quel ensemble est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ?

10 Soit $f(x) = \ln(x)$. Calculer f', f'', f'''.
Trouver une formule pour $f^{(n)}$ $(n > 0)$ et la démontrer.

11 Démontrer :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

12 Démontrer que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, puis que $x \leqslant \tan x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

13 Dériver et tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln|x|$.

14 Résoudre les équations suivantes.

a. $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$

b. $|\ln x| = \left|\ln\left(x + \frac{8}{3}\right)\right|$

15 Résoudre les équations suivantes.

a. $4\left(\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[6]{x}\right) = 15\sqrt{x}$

b. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Travaux dirigés

1 Tracer sans étudier de fonction les courbes d'équations suivantes :

a. $y = |e^x - 1|$ b. $y = |x| + |x-1|$

c. $y = 3 + 2|x| - x^2$ d. $y = 2 - |x^2 - 1|$

e. $y = x\sin x$ f. $y = e^{-x}\cos x$

2 On pose $a = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

a. Démontrer que $a^3 = 14 - 3a$.

b. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x - 14$ et en déduire la valeur de a.

3 Sur un échiquier (de 64 cases) on place un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite.
Combien de grains de riz obtient-on sur l'échiquier ? Combien de chiffres l'écriture décimale de ce nombre contient-elle, sachant que $\log 2 \simeq 0{,}301$?

4 À l'aide d'une calculatrice, donner l'écriture scientifique des réels :

$$a = 7777^{7777} \qquad b = e^{-100\,000}$$

5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Démontrer que la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.

Donner sa fonction réciproque.

6 Étudier les fonctions suivantes.

a. $f(x) = \dfrac{2\ln x + 3}{x}$ b. $f(x) = x(x^2-1)^2$

c. $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ d. $f(x) = (1+\cos x)\sin x$

e. $f(x) = \cos^2 x - 3\cos x + 2$ f. $z(x) = x\sqrt{1-x^2}$

g. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ h. $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

7 On pose : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
b. Démontrer que f est impaire.
c. Compléter l'étude de la fonction f : variations, limite, tracé.

8 Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x^3 - x^4}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
b. Déterminer sur quel ensemble f est dérivable.
c. Donner les variations de f puis tracer sa courbe représentative.

9 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} \qquad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

a. Justifier que les fonctions f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
b. Démontrer qu'elles sont impaires.
c. Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Que peut-on en déduire ?
d. Justifier que f et g sont dérivables. Calculer et simplifier leurs dérivées.
e. Tracer l'allure des courbes de f et de g.

10 On note :

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+3}{x+1} - \ln(x+1)$$

a. Étudier la fonction g. Démontrer qu'elle s'annule en un unique point α et donner un encadrement de α d'amplitude 1.
b. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.
c. Étudier la fonction f.

On donne $\ln 2 \simeq 0{,}7$ et $\ln 5 \simeq 1{,}6$.

11 On définit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{\frac{1}{x}}. \end{array}$

a. Déterminer les variations et les limites de f.
b. Justifier que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}_+$.
c. On note $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ le prolongement obtenu.
   Cette nouvelle fonction est-elle dérivable ?
d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

12 Reproduire l'exerice précédente avec la fonction $f : x \mapsto x\ln x$.

13 On pose $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

a. Donner l'ensemble de définition de f, étudier ses variations et ses limites.
b. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$.
   Justifier que g est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ et étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement.
c. Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymtote à la courbe de f en $\pm\infty$.
   Déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
d. Représenter l'allure de la courbe de f ainsi que ses asymptotes.

14 Démontrer les inégalités suivantes.

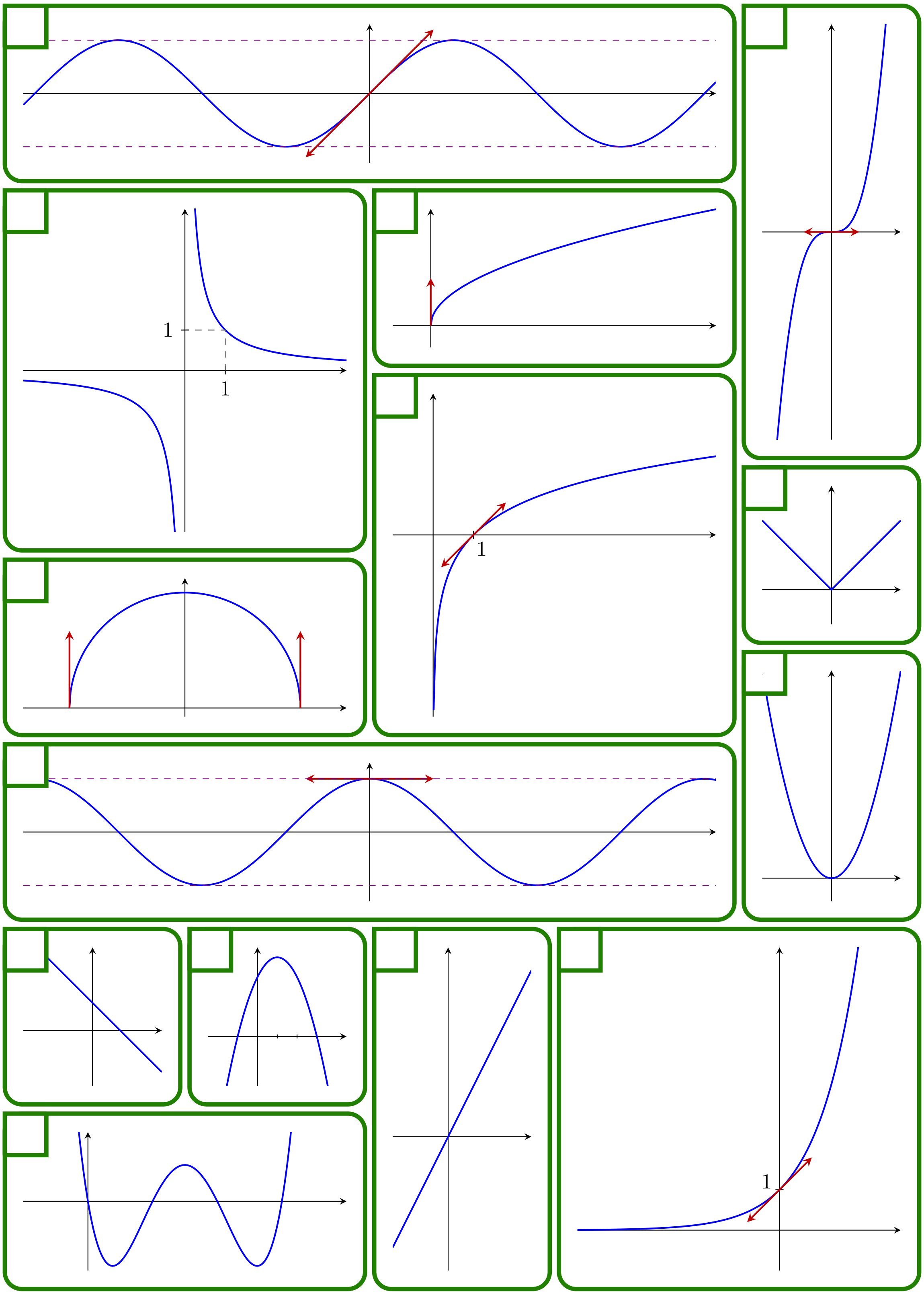
a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln x \leqslant \sqrt{x}$
b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \qquad 0 < \dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$
c. $\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad (x+1)^{x+1} \geqslant (x+2)^x$.

$\boxed{\textbf{15}}$ Identifier les graphes des fonctions suivantes :

$f_2(x) = 1 - x$ $\quad$ $f_3(x) = 2x$ $\quad$ $f_4(x) = x^2$ $\quad$ $f_5(x) = x^3$ $\quad$ $f_6(x) = \sqrt{x}$

$f_7(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $f_8(x) = (x+1)(3-x)$ $\quad$ $f_9(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ $\quad$ $f_{10}(x) = |x|$

$f_{11}(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $f_{12}(x) = e^x$ $\quad$ $f_{13}(x) = \ln x$ $\quad$ $f_{14}(x) = \cos x$ $\quad$ $f_{15}(x) = \sin x$



Note : tous les repères sont orthonormés.