Chapitre A3
Fonctions d'une variable réelle

I. Généralités sur les fonctions

A. Compléments sur les réels

Définition

On appelle *intervalle* une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant :

Exemples.

Sont des intervalles :

Ne sont pas des intervalles :

Remarque. L'intersection de deux intervalles est un intervalle, l'union ne l'est pas en général, ni le complémentaire.

Définitions

- On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *majorée* si :

  Le réel M est alors appelé un *majorant* de A.
- De même on dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *minorée* si :

  Le réel m est alors appelé un *minorant* de A.
- Une partie est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Définitions

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- Un *maximum* de A est un majorant de A appartenant à A. On le note $\mathrm{Max}(A)$.
- Un *minimum* de A est un minorant de A appartenant à A. On le note $\mathrm{Min}(A)$.

Exemple 1.

(i) L'intervalle $[-6, 4[$ est borné, il admet un minimum mais pas de maximum.

(ii) Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Remarque. Si A admet un maximum alors ce maximum est unique.

On peut donc dire *le* maximum de A alors qu'on doit dire *un* majorant de A.

Remarque. Si une partie A de $\mathbb{R}$ est finie alors elle admet un minimum et un maximum.

Proposition - Cas des ensembles d'entiers

- Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.
- Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un maximum.

Ces propriétés se généralisent aux parties de $\mathbb{Z}$.

Exemple. Nouvelle définition de la partie entière.

B. Définitions

On note E et F deux ensembles.

Définition

Soit f une fonction de E dans F.

- On dit que E est *l'ensemble de départ* (et non l'ensemble de définition) et F est *l'ensemble d'arrivée* de la fonction f.
- Si x est un élément de E et $y = f(x)$, alors y est appelé *image* de x par f, et x est appelé *antécédent* de y par f.

Notation

On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions de E dans F.

Remarques. Soit f une fonction de E dans F.

- Si x est élément de E alors x admet une et une seule image, il s'agit de $f(x)$.
- Si y est un élément de F, alors y peut ne pas avoir d'antécédent, en avoir un seul, ou en avoir plusieurs.

Notation

Si f est une fonction de E dans F alors on note :

Remarques.

- L'ensemble $f(E) = \{ f(x) \mid x \in E\}$ est appelé *image* de f. Il est inclus dans F.
- La donnée des ensembles de départ et d'arrivée fait partie de la définition d'une fonction.

Exemple 2. Les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

sont différentes.

Exemples et définitions

- La fonction $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est appelée *identité* de E.
- Soit f une fonction de E dans F, et A une partie de E.
  La fonction $f_{|A} : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est appelée *restriction* de f à A.
- Si $g : A \to F$ et $f : E \to F$ sont deux fonctions telles que $g = f_{|A}$, alors on dit que f est un *prolongement* de g à E.

C. Opérations

On note pour toute la suite D, E, F des parties de $\mathbb{R}$.

Définition

Si $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, alors $(f+g)$ et fg sont les fonctions de D dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in D \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

On définit également les fonctions λf (où λ est un réel), $f - g$, $\frac{f}{g}$ si g est à valeurs non-nulles.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subseteq E$.
On note $g \circ f$ et on appelle *composée* de f et de g la fonction :

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque. La composée de f et de g est définie si et seulement si $f(D) \subseteq E$, *i.e.*, :

$$\forall x \in D \qquad f(x) \in E$$

Exemple. Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Sur quel ensemble est définie $g \circ f$?

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exemple. Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors :

$\mathrm{Id}_F \circ f =$ $\qquad f \circ \mathrm{Id}_E =$

D. Parité et périodicité

Exemple 3. On définit $\begin{aligned} f : [0,6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2 - \tfrac{x}{2}. \end{aligned}$

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions :

$f_1 : x \mapsto f(x)$ $\quad f_2 : x \mapsto f(x) + 2$ $\quad f_3 : x \mapsto f(x + 2)$

$f_4 : x \mapsto f(-x)$ $\quad f_5 : x \mapsto -f(x)$ $\quad f_6 : x \mapsto f(2x)$ $\quad f_7 : x \mapsto 2f(x)$

Définitions

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que l'ensemble D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in D \qquad -x \in D$$

La fonction f est dite *paire* si :

$$\forall x \in D \qquad f(-x) = f(x)$$

Elle est dite *impaire* si :

$$\forall x \in D \qquad f(-x) = -f(x)$$

Remarques.

- La fonction f est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, elle est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Si une fonction est paire ou impaire alors on peut restreindre son étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et obtenir le reste de la courbe par symétrie.

Définition

$f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et T un réel strictement positif. On suppose que l'ensemble D est stable par addition de T, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in D \qquad x + T \in D$$

La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite *périodique* de *période* T, ou T-*périodique*, si :

$$\forall x \in D \qquad f(x+T) = f(x)$$

Remarque. Si f est périodique de période T alors on peut restreindre son étude à un intervalle de longueur T, comme $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. On obtiendra le reste de la courbe par translations successives de vecteur $T\vec{\imath}$.

Exemples. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π. La fonction tangente est périodique de période π.

▷ **Exercices 1, 2.**

E. Extrema

Définition

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *majorée*, respectivement *minorée*, *bornée* si la partie $f(D)$ de $\mathbb{R}$ est majorée, respectivement minorée, bornée.

Remarque. En d'autres termes, la fonction f est majorée si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in D \qquad f(x) \leqslant M$$

Ceci signifie que la courbe de f est en-dessous de la droite d'équation $y = M$.

Remarque. La fonction f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

Définition

La fonction f admet un *maximum* sur D si il existe $x_0 \in D$ tel que $f(x_0)$ soit un majorant de f sur D :

$$\exists x_0 \in D \qquad \forall x \in D \qquad f(x) \leqslant f(x_0)$$

Dans ce cas $f(x_0)$ est le maximum de l'ensemble $f(D)$.
On définit de même le *minimum* de f sur D.

Notation

S'il existe le maximum de f sur D est noté :

S'il existe le minimum est noté :

Exemple 4. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$ Alors f est minorée mais elle n'admet pas de minimum.

F. Croissance

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- *croissante* sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2 \qquad x_1 \leqslant x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

- *décroissante* sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2 \qquad x_1 \leqslant x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

- *strictement croissante* sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2 \qquad x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

- *strictement décroissante* sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2 \qquad x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

- *monotone* si elle est croissante ou décroissante.
- *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 5. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est-elle croissante ? Décroissante ?

Remarque. Soit f et g deux fonctions réelles telles que $g \circ f$ est définie.
- Si f et g sont croissantes alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f est croissante et g est décroissante alors $g \circ f$ est décroissante.
- Etc.

G. Études de fonctions

Méthode : Plan d'étude d'une fonction.

- Détermination de l'ensemble de définition (si l'ensemble de départ n'est pas donné).
- Réduction de l'ensemble d'étude grâce à la périodicité et à la parité.
- Continuité, dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée, variations.
  Éventuellement construction du tableau de variations.
- Limites aux bornes, étude des branches infinies (asymptotes éventuelles).
- Tracé.

Exemple 6. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$

Définitions

Soit a et b deux réels.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$
  alors la droite d'équation $x = a$ est *asymptote* à la courbe de f en a.
- Si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$
  alors la droite d'équation $y = b$ est *asymptote* à la courbe de f en $\pm\infty$.
- Si $f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x \to +\pm\infty]{} 0$
  alors la droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote* à la courbe de f en $\pm\infty$.

Exemple 7. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x \sin x}$

Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

▷ **Exercice 3.**

II. Dérivation

A. Définitions

Rappel sur les droites du plan.

- L'équation d'une droite est de la forme $y = ax + b$ ou $x = b$.
- Le vecteur de coordonnées $(1, a)$ ou $(0, 1)$ est directeur de la droite.
- Pour tracer la droite d'équation $y = ax + b$ on place le point $(0, b)$ puis on utilise le vecteur directeur.
- Si deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) sont donnés, alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. La valeur de b est calculée ensuite.

▷ **Exercices 4, 5.**

On note toujours D une partie de $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et x_0 un élément de D. On dit que la fonction f est *dérivable* en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

On note alors :

Ce réel est appelé *nombre dérivé* de f en x_0.

Proposition

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse x_0 admet pour équation :

Définition

On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *dérivable* ou *dérivable sur D* si elle est dérivable en tout point x_0 de D.

Dans ce cas la fonction $\begin{array}{rrcl} f' : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ est appelée *dérivée* de f.

Exemple 8. La fonction carré est dérivable.

▷ **Exercice 6.**

B. Dérivées usuelles

Proposition (Dérivées des fonctions usuelles)

Fonction	$\mathscr{D}$	$\mathscr{D}'$	Dérivée	Fonction	$\mathscr{D}$	$\mathscr{D}'$	Dérivée
C	$\mathbb{R}$			$\cos x$	$\mathbb{R}$		
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$			$\sin x$	$\mathbb{R}$		
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$			$\tan x$	$\mathscr{D}_{\tan}$		
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$			$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$		$\arccos x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$			$\arctan x$	$\mathbb{R}$		
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$		
e^x	$\mathbb{R}$			$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$		
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$			$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$		

Proposition

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition sauf :

- La fonction racine carrée qui est définie (et continue) sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction valeur absolue qui est définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- Les fonctions arccos et arcsin qui sont définies (et continues) sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $]-1, 1[$.

C. Opérations

Proposition

Soit u et v deux fonctions dérivables sur une partie D. Alors les fonctions $u + v$, λu (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$), uv et $\frac{u}{v}$ (si elle est définie) sont dérivables sur D et leurs dérivées sont :

$$\begin{aligned} (u+v)' &= u' + v' & \qquad (\lambda u)' &= \lambda u' \\ (uv)' &= u'v + uv' & \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u>. Il suffit de démontrer que pour tout $x_0 \in D$ ces fonctions sont dérivables en x_0. On note donc x_0 un élément de D.

- Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} \frac{(u+v)(x) - (u+v)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{u(x) + v(x) - u(x_0) - v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

  Comme u et v sont dérivables en x_0 alors le membre de droite admet une limite finie lorsque x tend vers x_0, et donc le membre de gauche admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Ainsi $(u + v)$ est dérivable en x_0 et par passage à la limite :

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

- (Exercice) On démontre de même que λu est dérivable en x_0 et que $(\lambda u)'(x_0) = \lambda\, u'(x_0)$.
- Produit et quotient : voir page suivante. □

▷ **Exercice 7.**

Démonstration. Dérivabilité et dérivée de uv :

Proposition

Soit $u : D \to \mathbb{R}$ et $v : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions composables (*i.e.*, $u(D) \subseteq E$). Si u et v sont dérivables alors $v \circ u$ est dérivable et :

Exemple 9. Dériver les fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \cos(2x) \qquad f_2(x) = e^{-x} \qquad f_3(x) = (4x-3)^5$$

$$f_4(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_5(x) = \ln(\sin x) \qquad f_6(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Remarque. Si $f(x) = u(ax+b)$ alors $f'(x) = a\,u'(ax+b)$.

Autre cas particuliers :

$(e^u)' =$ $\qquad$ $(\ln u)' =$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{u}\right)' =$

$\sqrt{u}' =$ $\qquad$ $(u^\alpha)' =$

Démonstration. Dérivée de $\frac{u}{v}$

▷ **Exercice 8.**

Exemple 10. Sur quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles définies ? dérivables ?

$$f(x) = \sqrt{4-x} \qquad g(x) = x\sqrt{|x|}$$

▷ **Exercice 9.**

Méthode - Justifier la dérivabilité.

- On sait que les fonctions usuelles sont dérivables, exceptées quelques-unes en certains points. De plus les sommes, produits, quotients, composées de fonctions dérivables sont dérivables.

  On peut donc rapidement justifier la dérivabilité sur un certain sous-ensemble de l'ensemble de définition.
- S'il reste un ou plusieurs points isolés, il faut les étudier séparément en revenant à la définition de la dérivée.

  Les sommes, produits, quotients, composées de fonctions non toutes dérivables peuvent être dérivables, donc l'étude de ces points est indispensable.

D. Croissance et extrema

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f' est positive si et seulement si f est croissante.
- f' est négative si et seulement si f est décroissante.
- f' est nulle si et seulement si f est constante.
- Si f' est strictement positive alors f est strictement croissante.
- Si f' est strictement négative alors f est strictement décroissante.

Proposition

Avec les mêmes notations :

(i) Si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.

(ii) Si f' est négative et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

Démonstration du *(i)*. Si f' est positive alors f est croissante.

Si f n'est pas strictement croissante alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Pour tout élément x de $[x_1, x_2]$, comme $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ alors par croissance $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$. Ainsi f est constante sur $[x_1, x_2]$, donc sa dérivée y est nulle. Or l'intervalle $[x_1, x_2]$ contient une infinité de points, ce qui constitue une contradiction. □

Corollaire

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Si $f' = g'$ alors il existe une constante K telle que $f = g + K$, *i.e.*,

$$\forall x \in I \qquad f(x) = g(x) + K$$

Démonstration. On pose $h = f - g$. La fonction h est dérivable par soustraction, f et g étant dérivables. De plus par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Ainsi h' est nulle sur l'intervalle I, donc h est constante sur cet intervalle. Il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in I \qquad h(x) = K$$

Ceci donne $f(x) = g(x) + K$ pour tout $x \in I$. □

Attention

Les propriétés précédentes ne sont valables que sur un intervalle !

Exemple 11. La fonction sgn : $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est dérivable, de dérivée nulle, mais pas constante.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$. Si f' est positive (respectivement négative, nulle) alors f est croissante (respectivement décroissante, constante) sur tout intervalle de D.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et x_0 un point *intérieur* de I :

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq I.$$

Si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque. La réciproque de cette proposition est fausse.

La fonction f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ fournit un contre-exemple.

Démonstration. (Voir addendum.)

Méthode

- On construit le tableau de variations d'une fonction en étudiant le signe de sa dérivée.
- Les points où celle-ci est nulle sont des extrema *potentiels*, les variations permettent de déterminer s'ils sont effectivement des extrema, ainsi que leur nature.

E. Dérivées n-èmes

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit par récurrence les dérivées n-èmes de f de la façon suivante.

- On pose $f^{(0)} = f$ et on admet que toute fonction est dérivable 0 fois.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on dit que f est *dérivable n fois* sur D si elle est dérivable $n-1$ fois et si sa dérivée $(n-1)$-ème est dérivable.
- On note alors $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$ et on appelle *dérivée n-ème* de f sur D la fonction $f^{(n)}$.

Remarques.

- En particulier $\quad f^{(0)} = f \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$
- On note $\quad f' = f^{(1)} \qquad f'' = f^{(2)} = (f')' \qquad f''' = f^{(3)} = (f'')' \qquad$ etc.

Définition

Les fonctions $f^{(n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont aussi appelées *dérivées successives* de f.

Exemple 12. Calcul des dérivées successives de :

$$f(x) = e^x \qquad f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 12x + 1 \qquad f(x) = \cos x$$

▷ **Exercice 10.**

Définition

Soit n un entier naturel et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que la fonction f est *de classe $\mathscr{C}^n$* si elle est n fois dérivable et sa dérivée n-ème est continue.
- On dit que la fonction f est *de classe $\mathscr{C}^\infty$* si elle est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples.

- Une fonction est de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue.
- Une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ si elle est dérivable de dérivée continue.

  On dit aussi qu'elle est *continûment dérivable*.

F. Convexité

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *convexe* si sa courbe représentative est en-dessous de toutes ses cordes :

C'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1] \qquad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *concave* si la fonction $-f$ est convexe, c'est-à-dire si sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses cordes.

Exemples. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \ln x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est concave.
La fonction $x \mapsto x^3$ n'est ni convexe, ni concave.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

- f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante,
- f est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors :

- f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive,
- f est concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative.

Théorème

- La courbe représentative d'un fonction dérivable convexe est au-dessus de toutes ses tangentes.
- La courbe représentative d'un fonction dérivable concave est en-dessous de toutes ses tangentes.

Exemples (à retenir).

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x \geqslant x + 1 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln x \leqslant x - 1$$

▷ **Exercice 11.**

III. Continuité

A. Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et x_0 un point de D.
On dit que f est *continue en* x_0 si :

On dit que f est *continue* ou *continue sur* D si elle est continue en tout point de D.

Propositions

- Toutes les fonctions usuelles du programme sont continues sur leur ensemble de définition sauf la fonction partie entière.
- Les sommes, produits, quotients, composées de fonctions continues sont continues.

Proposition

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

B. Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux points de I, tels que $a < b$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Démonstration du corollaire. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du corollaire. Soit d compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Comme f est continue alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c) = f(c') = d$.

Si $c < c'$ ou $c > c'$ alors $f(c) < f(c')$ ou $f(c) > f(c')$, ce qui est impossible car $f(c) = f(c')$.

Donc $c = c'$, ce qui démontre l'unicité du point c. □

C. Bijections

Définition

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

On dit que f est une *bijection*, ou que f est *bijective*, si tout élément de son ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent.

$$\forall y \in F \qquad \exists! x \in E \qquad f(x) = y$$

Théorème de la bijection

Soit $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si

- f est continue,
- f est strictement croissante.

Alors f réalise une bijection de $I = [a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$.

Si f est strictement décroissante alors on remplace $[f(a), f(b)]$ par $[f(b), f(a)]$.

Si I est ouvert ($I =]a, b[$) alors on remplace $[f(a), f(b)]$ par $\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$.

Etc.

Exemple.

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement décroissante.

Alors f réalise une bijection de $]a, b]$ dans :

Exemple 13. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + x^2 + x. \end{array}$

a. Déterminer les variations de la fonction f.

b. Démontrer qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c. En déduire que l'équation $\quad x^3 + x^2 + x = 1 \quad$ admet une et une seule solution.

IV. Fonctions classiques

A. Fonctions polynomiales

Définition

Une fonction *polynomiale* est une fonction de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où n est un entier naturel, et $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels.
Si a_n est non-nul on dit que n est le *degré* de f.

Propositions

- Les fonctions polynomiales sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Leurs limites en $\pm\infty$ sont celles de leurs termes de plus haut degré.

Remarques.

- Les fonctions de degré 0 sont les fonctions constantes non-nulles.
- Les fonctions de degré au plus 1 ($x \mapsto ax + b$) sont appelées *fonctions affines*.
- La fonction nulle est de degré $-\infty$.

B. Fonctions trigonométriques

1. Sinus et cosinus

Propositions

- Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
- La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.
- Elles sont dérivables, de dérivées $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

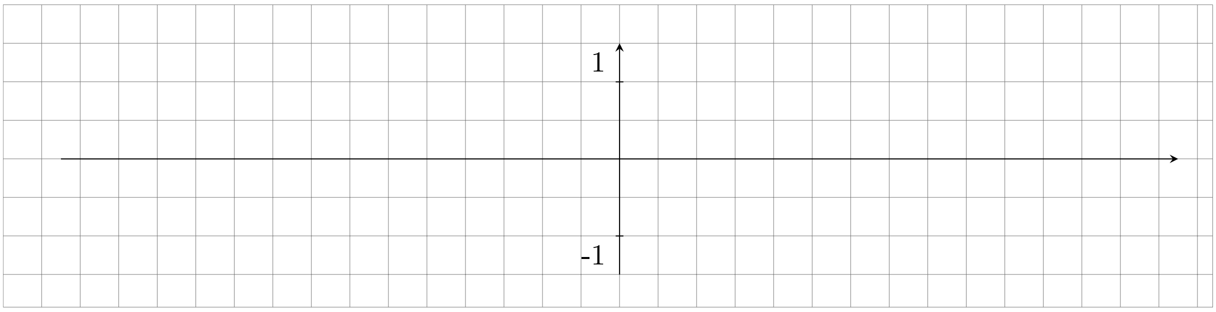
Démonstration. On connait les propriétés :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos x & \qquad \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(-x) &= \cos x & \qquad \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Pour la dérivabilité on admet la propriété : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

T.S.V.P.

Tracé. Par périodicité et parité on peut restriendre l'étude à $[0, \pi]$.



2. Tangente

Proposition

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, π-périodique et impaire. Elle est dérivable, de dérivée :

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration. On connait déjà les propriétés :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{et} \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

La dérivabilité et la dérivée sont obtenues par quotient. □

Proposition

Limites de la fonction tangente :

Tracé. Par périodicité et parité on peut restreindre l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

▷ **Exercice 12.**

3. Limites usuelles

Proposition

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} =$$

Démonstration.

C. Logarithmes

1. Logarithme népérien

Définition

La fonction *logarithme népérien* (John Napier, Écosse, 1550 – 1617) est la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui s'annule en 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Propositions

(i) $\ln 1 = 0$

(ii) La fonction ln est dérivable et sa dérivée est : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

(iii) Pour tout $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$

Démonstration du *(iii)*.

Corollaire

Pour tout $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln \frac{1}{b} = -\ln b \qquad \ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration du corollaire.

Proposition

La fonction ln est strictement croissante, de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Démonstration.

Tracé. La tangente à la courbe en $x_0 = 1$ admet pour équation $y = x - 1$.

Proposition

Limites usuelles :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration.

▷ **Exercices 13, 14.**

2. Logarithme de base 10

Définition

On appelle *logarithme de base 10* la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Pour éviter les ambiguïtés on peut noter $\log_{10}$ cette fonction.

Remarque. La dérivée de la fonction log est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$

La fonction log est strictement croissante.
Elle vérifie les mêmes propriétés calculatoires et de limite.

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\log\left(10^n\right) = n$.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad y = \log x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 10^y$$

Autrement dit le logarithme décimal est la réciproque de la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & 10^x \end{array}$.

Exemple. Le logarithme décimal donne l'ordre de grandeur. Par exemple :

Si $\log x = 28{,}54$ alors

Remarque. On définit de même le logarithme de base a pour tout $a > 0$ distinct de 1 par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.
Le logarithme binaire est utilisé en algorithmique.

D. Exponentielles

1. Fonction exponentielle

Remarque.

Les variations et les limites de la fonction ln montrent qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Donc tout réel x possède un et un seul antécédent par cette fonction. On note $\exp(x)$ cet antécédent.

On dit que exp est la *fonction réciproque* de la fonction ln.

Définition

On appelle *exponentielle* la fonction réciproque de la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

On note exp cette fonction.

On note $\begin{array}{rcl} \exp : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$ par commodité mais on retient que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp(x) > 0$$

Remarque. Comme la fonction exp est la réciproque de la fonction ln alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \qquad y = \exp(x) \quad \iff \quad x = \ln y$$

Notation

On note e l'antécédent de 1 par la fonction logarithme népérien.

Alors $\ln e = 1$, donc $e = \exp(1)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(e^n) = n$, donc $e^n = \exp(n)$.

On note alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

Remarque. Le nombre e est *irrationnel* et même *transcendant*, il est approximativement égal à $e \simeq 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$

Proposition

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad\qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad\qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Démonstration.

T.S.V.P.

Proposition

La fonction exponentielle est dérivable, égale à sa propre dérivée.
Elle est strictement croissante et ses limites sont :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Tracé. La tangente à la courbe de l'exponentielle en 0 admet pour équation $y = x + 1$.

Proposition

Limite usuelle :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

<u>Démonstration</u>. La fonction exponentielle est dérivable en 0 de dérivée 1. Ceci donne exactement l'égalité ci-dessus. □

2. Puissances

Définition

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ on note :

On définit ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction *puissance* α : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha. \end{array}$

Proposition

Pour tous $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Démonstration. Tout se calcule avec la formule $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle. □

Proposition

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration.

Corollaire

La fonction puissance α est strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$.

Tracé.

▷ **Exercice 15.**

Remarque. Ne pas confondre les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ avec les fonctions *exponentielles de base* a : $x \mapsto a^x$. Celles-ci sont définies sur $\mathbb{R}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

E. Croissances comparées

Théorème (Croissances comparées)

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Remarque. En particulier :

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} =$$

Démonstration. Limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$:

Démonstration (suite).

Ensuite on écrit

$$\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{\ln y}{y}\right)^\beta \qquad \text{avec} \quad y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Ceci permet de démontrer le deuxième résultat. Le premier s'obtient en écrivant :

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \left|\ln \frac{1}{y}\right|^\beta = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln^\beta y}{y^\alpha} = 0$$

Les deux derniers résultats s'obtiennent en posant $y = e^x$. □