Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 22 septembre 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°1

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n et réel x on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x).$$

1. Soit a et b deux réels. Exprimer $\cos a \sin b$ en fonction de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.
2. En déduire une simplification de $S_n(x) \times \sin x$ par télescopage.
3. Donner une expression de $S_n(x)$ sans signe somme.
   On séparera le cas où x est multiple de π ($x \in \pi\mathbb{Z}$) de celui où il ne l'est pas.
4. Une application.
   (a) Donner la valeur de $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$.
   (b) Justifier que $\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$ puis en déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 \qquad D_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$$

Le but de cet exercice est de déterminer des formules générales pour C_n et D_n.
Les formules pour A_n et B_n sont supposées connues.

1. (a) Démontrer :
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \sum_{k=2}^{n} \binom{k+1}{3} = \binom{n+2}{4}.$$
   (b) En déduire une expression de C_n en fonction de B_n, A_n et n, puis donner une formule pour C_n sans signe somme.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$
   (a) Développer la formule pour C_i et exprimer S_n en fonction de D_n, C_n et B_n.
   (b) Faire apparaître une somme triangulaire puis déterminer une expression de S_n en fonction de C_n, D_n et n.
   (c) En déduire une expression de D_n en fonction de C_n, B_n et n, puis donner une formule pour D_n sans signe somme.